[東京工業大学 1983 年 $\boxed{5}$]

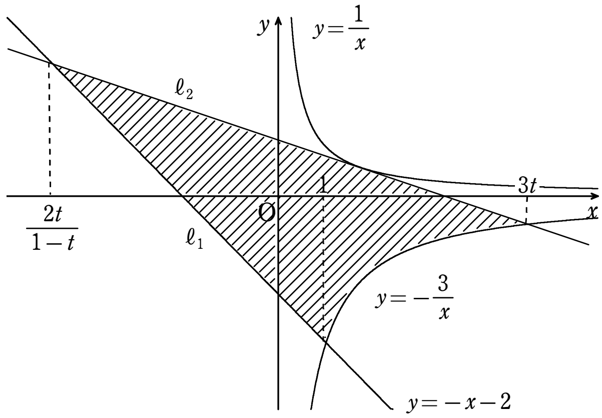
直線 $y=-x-2$ を ℓ_1 とし，曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ $(t>1)$ における接線を ℓ_2 とする。曲線 $y=-\dfrac{3}{x}$ $(x>0)$ と 2 直線 ℓ_1, ℓ_2 とで囲まれる部分の面積を $S(t)$ とするとき，$S(t)$ の最小値を求めよ。

曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ $(t>1)$ における接線 ℓ_2 の方程式は $y-\dfrac{1}{t}=-\dfrac{1}{t^2}(x-t)$ である。

この ℓ_2 が直線 $\ell_1 : y=-x-2$，曲線 $y=-\dfrac{3}{x}$ $(x>0)$ と交わる点の座標は

$\left(\dfrac{2t}{1-t},\ \dfrac{-2}{1-t}\right)$，$\left(3t,\ -\dfrac{1}{t}\right)$ である。

また，直線 ℓ_1 が曲線 $y=-\dfrac{3}{x}$ $(x>0)$ と交わる点の座標は $(1,\ -3)$ であるから，



求める面積 $S(t)$ は

$$S(t)=\int_{\frac{2t}{1-t}}^{1}\left\{-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t}-(-x-2)\right\}dx+\int_{1}^{3t}\left\{-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t}-\left(-\frac{3}{x}\right)\right\}dx$$

$$=\left[\left(-\frac{1}{t^2}+1\right)\cdot\frac{x^2}{2}+\left(\frac{2}{t}+2\right)x\right]_{\frac{2t}{1-t}}^{1}+\left[-\frac{x^2}{2t^2}+\frac{2}{t}x+3\log|x|\right]_{1}^{3t}$$

$$=4+\frac{2(t+1)}{t-1}+3\log 3t$$

これより

$$S'(t)=2\cdot\frac{1\cdot(t-1)-(t+1)\cdot 1}{(t-1)^2}+3\cdot\frac{1}{3t}\cdot 3=\frac{-4}{(t-1)^2}+\frac{3}{t}=\frac{3t^2-10t+3}{t(t-1)^2}=\frac{(3t-1)(t-3)}{t(t-1)^2}$$

となる。よって，$t>1$ において $S(t)$ は $t=3$ のときに極小かつ最小となる。

したがって 最小値は $S(3)=8+6\log 3$