

[東京工業大学 1983 年 4]



A, B, C を 2 等辺 3 角形の内角とし, $F = \sin 3A + \sin 3B + \sin 3C$ とおく。

- (1) F の最大値を求めよ。
- (2) F のとる値の範囲を求めよ。



- (1) $B = C = \theta$ とおくと, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であり

$$\begin{aligned} F &= \sin 3A + \sin 3B + \sin 3C \\ &= \sin 3(\pi - 2\theta) + \sin 3\theta + \sin 3\theta \\ &= \sin 6\theta + 2\sin 3\theta \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} F' &= 6\cos 6\theta + 6\cos 3\theta \\ &= 6(2\cos^2 3\theta - 1 + \cos 3\theta) \\ &= 6(2\cos 3\theta - 1)(\cos 3\theta + 1) \end{aligned}$$

より $F' = 0$ となるのは $\cos 3\theta = \frac{1}{2}, -1$ のときで,

$0 < 3\theta < \frac{3\pi}{2}$ より $3\theta = \frac{\pi}{3}, \pi$ すなわち $\theta = \frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{3}$ のとき。

よって, F の増減は下表に従う。

θ	0	...	$\frac{\pi}{9}$...	$\frac{\pi}{3}$...	$\frac{\pi}{2}$
F'		+	0	-	0	-	
F		↗	極大	↘		↘	

したがって, F は $\theta = \frac{\pi}{9}$ のときに最大になり,

$$\text{最大値は } F \Big|_{\theta=\frac{\pi}{9}} = \sin \frac{2\pi}{3} + 2\sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(2) $\theta \rightarrow 0$ のとき $F \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ のとき $F \rightarrow -2$ であるから

$$-2 < F \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$