[東京工業大学 1983 年 $\boxed{2}$]

t が $0 < t \leqq \dfrac{1}{2}$ を動くとき，t とともに変化する放物線 $y = \dfrac{1}{2}\left\{t + \dfrac{x(2-x)}{t}\right\}$ が通る点 $(x,\ y)$ 全体の集合を図示せよ。

$y = \dfrac{1}{2}\left\{t + \dfrac{x(2-x)}{t}\right\}$ より $t^2 - 2yt - x^2 + 2x = 0$ であり，$f(t) = t^2 - 2yt - x^2 + 2x$ とおく。

$f(t) = 0$ が $0 < t \leqq \dfrac{1}{2}$ の範囲に実数解を少なくとも 1 つもつような $x,\ y$ の条件を求めればよい。

$f(t) = (t-y)^2 - x^2 + 2x - y^2$ より 軸の方程式は $t = y$ である。

以下，軸の位置によって場合分けをする。

（i）$y \leqq 0$ のとき

$f(0) < 0$ かつ $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \geqq 0$ となればよい。

よって「$-x^2 + 2x < 0$」かつ「$\dfrac{1}{4} - y - x^2 + 2x \geqq 0$」

すなわち「$x < 0,\ 2 < x$」かつ「$y \leqq -x^2 + 2x + \dfrac{1}{4}$」

（ii）$0 < y < \dfrac{1}{4}$ のとき

$f(y) \leqq 0$ かつ $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \geqq 0$ となればよい。

よって「$-x^2 + 2x - y^2 \leqq 0$」かつ「$\dfrac{1}{4} - y - x^2 + 2x \geqq 0$」

すなわち「$(x-1)^2 + y^2 \geqq 1$」かつ「$y \leqq -x^2 + 2x + \dfrac{1}{4}$」

（iii）$\dfrac{1}{4} \leqq y < \dfrac{1}{2}$ のとき

$f(y) \leqq 0$ かつ $f(0) > 0$ となればよい。

よって「$-x^2 + 2x - y^2 \leqq 0$」かつ「$-x^2 + 2x > 0$」

すなわち「$(x-1)^2 + y^2 \geqq 1$」かつ「$0 < x < 2$」

（iv） $y \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$f(0) > 0$ かつ $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqq 0$ となればよい。

よって「$0 < x < 2$」かつ「$y \geqq -x^2 + 2x + \dfrac{1}{4}$」

(ⅰ),(ⅱ),(ⅲ)を xy 平面に図示すると，下図のようになる。

ただし，境界線は実線を含み，破線を含まない。

また，境界線上の点のうち●は含み，○は含まない。