[東京工業大学 1983 年 $\boxed{1}$]

☆─────────────────────────☆

正の有理数 x を既約分数で表したとき，その分母の平方を $f(x)$ とする（自然数 n に対しては $f(x)=1$ とする)。

(1) 相異なる正の有理数 $x,\ y$ に対して，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{2}{|x-y|} \leqq f(x)+f(y)$$

(2) 自然数 n に対して $x_n=\dfrac{2}{3n+4}$ とするとき，次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\left\{f(x_n)+f(x_{n+1})\right\}|x_n-x_{n+1}|$$

☆─────────────────────────☆

(1) 相異なる正の有理数 $x,\ y$ を既約分数で表して $x=\dfrac{n_1}{m_1},\ y=\dfrac{n_2}{m_2}$

（$m_1,\ m_2,\ n_1,\ n_2$ は正の整数で，$\dfrac{n_1}{m_1}\neq\dfrac{n_2}{m_2}$ を満たす）とおく。

このとき，
$$\begin{aligned}
f(x)+f(y)-\frac{2}{|x-y|} &= {m_1}^2+{m_2}^2-\frac{2}{\left|\dfrac{n_1}{m_1}-\dfrac{n_2}{m_2}\right|}\\
&= {m_1}^2+{m_2}^2-\frac{2m_1m_2}{|m_2n_1-m_1n_2|}\\
&\leqq {m_1}^2+{m_2}^2-2m_1m_2 \quad (\because\ |m_2n_1-m_1n_2|\geqq 1)\\
&= (m_1-m_2)^2 \geqq 0
\end{aligned}$$

等号成立は $|m_2n_1-m_1n_2|=1$ かつ $m_1=m_2$ のとき。

よって，$\dfrac{2}{|x-y|}\leqq f(x)+f(y)$ が成り立つ。

(2) $x_n=\dfrac{2}{3n+4}$ は n が偶数のときには分母が約分できるので，n の偶奇で場合分けする。

（ｉ）$n=2k\ (k=1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

$x_n=\dfrac{2}{3\cdot 2k+4}=\dfrac{1}{3k+2}$ より

$$x_{n+1}=\frac{2}{3(n+1)+4}=\frac{2}{3n+7}=\frac{2}{3\cdot 2k+7}=\frac{2}{6k+7}$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\left\{f(x_n)+f(x_{n+1})\right\}|x_n-x_{n+1}|=\lim_{n\to\infty}\left\{(3k+2)^2+(6k+7)^2\right\}\left|\frac{1}{3k+2}-\frac{2}{6k+7}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{45k^2+96k+53\right\}\cdot\frac{3}{18k^2+33k+14}$$

$$=3\cdot\frac{45}{18}$$

$$=\frac{15}{2}$$

（ⅱ） $n=2k-1\ (k=1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

（ⅰ）と同様にして $\lim_{n\to\infty}\left\{f(x_n)+f(x_{n+1})\right\}|x_n-x_{n+1}|=\dfrac{15}{2}$

となる。

よって，$\lim_{n\to\infty}\left\{f(x_n)+f(x_{n+1})\right\}|x_n-x_{n+1}|=\dfrac{15}{2}$