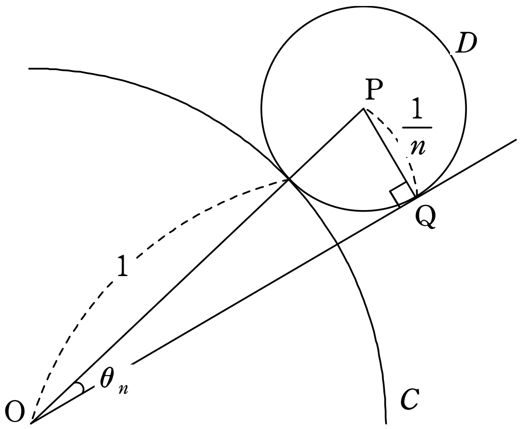
[**東京工業大学 1982 年 $\boxed{1}$**]

n を自然数とする。半径 $\dfrac{1}{n}$ の円を互いに重なり合わないように半径 1 の円に外接させる。このとき外接する円の最大個数を a_n とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ を求めよ。

円 C の中心を O とする。この円に外接する半径 $\dfrac{1}{n}$ の円 D の中心を P とする。

O から円 D に接線を 1 つ引き，その接点を Q とする。



このとき，$\angle\mathrm{POQ}=\theta_n$ とすると題意の条件から

$$2\pi-2\theta_n<2\theta_n\times a_n<2\pi$$

が成り立つ。

両辺を $2n\theta_n$ で割って

$$\frac{\pi}{n\theta_n}-\frac{1}{n}<\frac{a_n}{n}<\frac{\pi}{n\theta_n}$$

ここで，$\sin\theta_n=\dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{n+1}$

また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\theta_n=0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\theta_n}{\theta_n}=1$ なので

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n\theta_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n\theta_n}\cdot\frac{\sin\theta_n}{\sin\theta_n}\\&=\lim_{n\to\infty}\pi\cdot\frac{\sin\theta_n}{\theta_n}\cdot\frac{1}{n\left(\frac{1}{n+1}\right)}\\&=\lim_{n\to\infty}\pi\cdot\frac{\sin\theta_n}{\theta_n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\\&=\pi\end{aligned}$$

となることがわかる。これにより $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{n\theta_n}-\frac{1}{n}\right)=\pi$ もわかる。

よって，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\pi$

[東京工業大学 1982 年 $\boxed{2}$]

☆――――☆

平面上の原点Oを中心とする半径 1 の円 C の周上に，同一直径上にない異なる 2 点A, Bをとる。A, Bの位置ベクトルを $\vec{a},\ \vec{b}$ とし， $L=\{m\vec{a}+n\vec{b}\mid m,\ n$ は整数$\}$ とする。

(1) 零ベクトルでない， L の元の大きさの最小値 r は $1,\ |\vec{a}+\vec{b}|,\ |\vec{a}-\vec{b}|$ のうちの最小のものに等しいことを証明せよ。

(2) 2 点A, Bが $r=1$ を満たして C の周上を動くとき，△OABの面積 S の最小値を求めよ。

☆――――☆

(1) $\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とおく。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ であり， $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ である。

$f(m,\ n)=\left|m\vec{a}+n\vec{b}\right|^2$ とおくと，

$f(m,\ n)=m^2+2mn\vec{a}\cdot\vec{b}+n^2=m^2+n^2+2mn\cos\theta$

（ⅰ） $mn=0$（ただし， $m=n=0$ を除く）のとき

$f(m,\ n)=m^2+n^2\geqq 1$ であり，

等号成立は $(m,\ n)=(\pm 1,\ 0),\ (0,\ \pm 1)$ のときである。

このとき， $f(m,\ n)$ の最小値は $\left|\vec{a}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2=1$ となる。

（ⅱ） $mn>0$ のとき

$f(m,\ n)=(m-n)^2+2mn+2mn\cos\theta$

$=(m-n)^2+2mn(1+\cos\theta)$

$\geqq 2(1+\cos\theta)$ であり，

等号成立は $m-n=0,\ mn=1$ すなわち $(m,\ n)=(1,\ 1),\ (-1,\ -1)$ のときである。

このとき， $f(m,\ n)$ の最小値は $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|-\vec{a}-\vec{b}|^2=2(1+\cos\theta)$ となる。

（ⅲ） $mn<0$ のとき

$f(m,\ n)=(m+n)^2-2mn+2mn\cos\theta$

$=(m+n)^2-2mn(1-\cos\theta)$

$\geqq 2(1-\cos\theta)$ であり，

等号成立は $m+n=0,\ mn=-1$ すなわち $(m,\ n)=(1,\ -1),\ (-1,\ 1)$ のときである。

このとき， $f(m,\ n)$ の最小値は $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|-\vec{a}+\vec{b}|^2=2(1-\cos\theta)$ となる。

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)より，L の元の大きさの最小値 r は $1,\ |\vec{a}+\vec{b}|,\ |\vec{a}-\vec{b}|$ のうちの最小のものとなる。

⑵ $r=1$ となるような θ の範囲を求める。

3 つの最小値候補 $1,\ \sqrt{2(1+\cos\theta)},\ \sqrt{2(1-\cos\theta)}$ において $r=1$ となるのは

$1\leqq\sqrt{2(1+\cos\theta)}$ かつ $1\leqq\sqrt{2(1-\cos\theta)}$ となるときである。

これを解くと $-\dfrac{1}{2}\leqq\cos\theta\leqq\dfrac{1}{2}$ であり，

θ は 2 つのベクトルのなす角なので $0\leqq\theta\leqq\pi$ としてよいから $\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ となる。

この範囲において

$$\triangle \mathrm{OAB}\text{の面積}\ S=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\sin\theta$$
$$\geqq\frac{\sqrt{3}}{4}$$

等号成立は $\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi$ のとき。

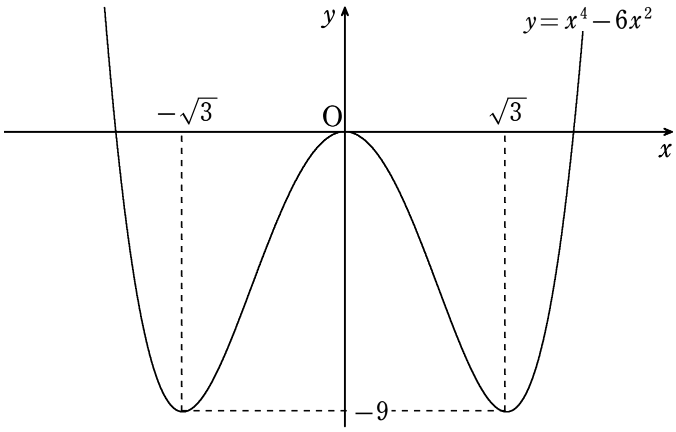
よって，求める最小値は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

[東京工業大学 1982 年 $\boxed{3}$]

曲線 $y=x^4-6x^2$ を C とし，不等式 $y>x^4-6x^2$ で定まる領域内の点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ から異なる 4 本の接線が C に引けるとする。このとき，点 P の動きうる領域 D を求め図示せよ。

$y=x^4-6x^2$ より曲線 C は y 軸に関して対称なグラフで，

$y'=4x^3-12x=4x\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)$ より C の概形は次の図のようになる。



C 上の点 $(t,\ t^4-6t^2)$ における接線の方程式は

$y-(t^4-6t^2)=(4t^3-12t)(x-t)$ であり，これが $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ を通るとき

$\beta-(t^4-6t^2)=(4t^3-12t)(\alpha-t)\ \Leftrightarrow\ 3t^4-4\alpha t^3-6t^2+12\alpha t+\beta=0$ となる。

ここで，$f(t)=3t^4-4\alpha t^3-6t^2+12\alpha t+\beta$ とおく。

不等式 $y>x^4-6x^2$ で定まる領域内の点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ から異なる 4 本の接線が C に引けるということは

$\beta>\alpha^4-6\alpha^2$ のもとで，$f(t)=0$ が異なる 4 つの実数解をもつということに他ならない。

また，グラフの対称性から $\alpha\geqq 0$ として考える。

$f(t)=3t^4-4\alpha t^3-6t^2+12\alpha t+\beta$ より

$f'(t)=12t^3-12\alpha t^2-12t+12\alpha$

$\qquad=12(t-\alpha)(t+1)(t-1)$ である。

（i）$0\leqq\alpha<1$ のとき

$f(t)=0$ が異なる 4 つの実数解をもつのは，「$f(-1)<0$ かつ $f(1)<0$」のときで，

「$3+4\alpha-6-12\alpha+\beta<0$ かつ $3-4\alpha-6+12\alpha+\beta<0$」

$\Leftrightarrow$「$\beta<8\alpha+3$」かつ「$\beta<-8\alpha+3$」

$\Leftrightarrow\ \beta < -8\alpha + 3$

（ⅱ）$\alpha = 1$ のとき

$y = f(t)$ は極小値を 1 つしかもたないので，$f(t) = 0$ が異なる 4 つの実数解をもつことはない。

（ⅲ）$\alpha > 1$ のとき

$f(t) = 0$ が異なる 4 つの実数解をもつのは，「$f(-1) < 0$ かつ $f(\alpha) < 0$」のときで，

「$3 + 4\alpha - 6 - 12\alpha + \beta < 0$ かつ $-\alpha^4 + 6\alpha^2 + \beta < 0$」

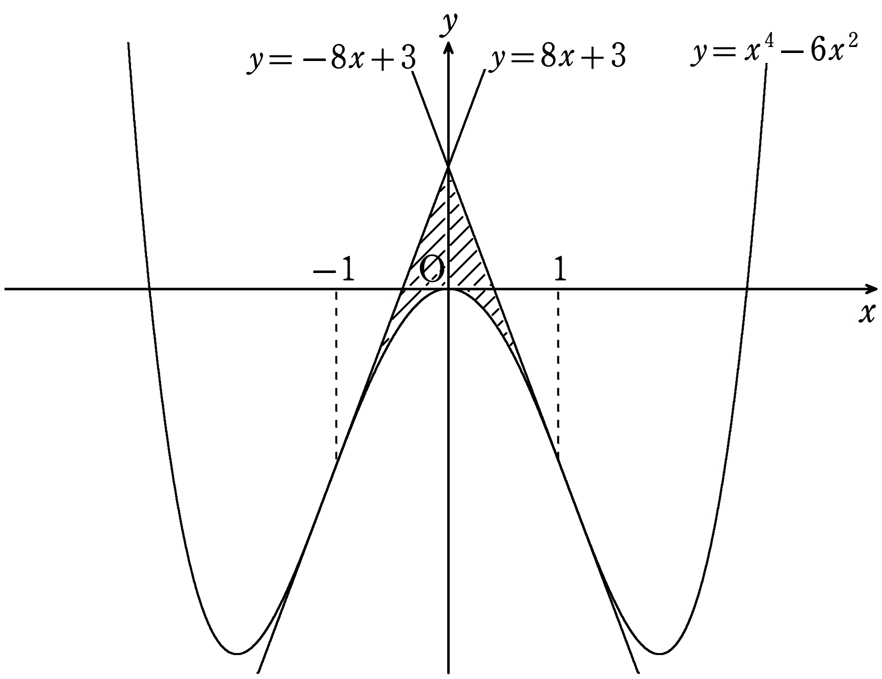
$\Leftrightarrow$「$\beta < 8\alpha + 3$」かつ「$\beta < \alpha^4 - 6\alpha^2$」

となるが，これは 2 つ目の式が $\beta > \alpha^4 - 6\alpha^2$ を満たさないので，不適。

したがって，対称性を考えると求める領域は

$y > x^4 - 6x^2$ かつ $y < -8x + 3$ かつ $y < 8x + 3$

となり，図の斜線部のようになる。ただし，境界線上の点は含まない。



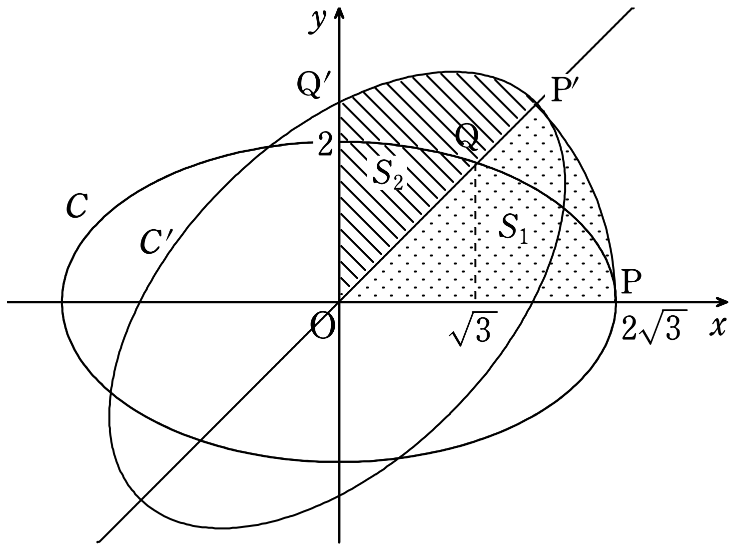
[東京工業大学 1982 年 $\boxed{4}$]

☆────────────────────────☆

$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}\leqq 1$ で定まる領域を D とする。原点を中心とし D を正の向きに 45° 回転させるとき，D の点が通る全体は平面上の 1 つの領域をつくる。この領域の第 1 象限にある部分の面積を求めよ。

☆────────────────────────☆

楕円 C ： $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$ と x 軸との交点を P，直線 $y=x$ との交点を Q とする。



また，楕円 C を正の向きに 45° 回転させてできる楕円を C' とし，

C' と直線 $y=x$ との交点を P′， y 軸との交点を Q′ とする。

このとき，求める領域の面積 S は

「x 軸と直線 $y=x$ と原点中心，半径 $2\sqrt{3}$ の円とで囲まれる部分の面積 S_1」および

「楕円 C' と直線 $y=x$ と y 軸とで囲まれる部分の面積 S_2」との和である。

また， S_2 は楕円 C と x 軸と直線 $y=x$ とで囲まれる部分の面積に等しく，

直線 $y=x$ と楕円 C との交点の x 座標は $-\sqrt{3},\ \sqrt{3}$ であるから

$$S_1=\frac{1}{8}\cdot\pi\cdot\left(2\sqrt{3}\right)^2=\frac{3}{2}\pi$$

$$S_2=\int_0^{\sqrt{3}}x\,dx+\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\sqrt{\frac{12-x^2}{3}}\,dx$$

ここで，右辺の第 2 項の積分について

$x=2\sqrt{3}\cos t$　とおくと　$dx=-2\sqrt{3}\sin t dt$　であり，

$x:\sqrt{3}\to 2\sqrt{3}$　のとき　$t:\dfrac{\pi}{3}\to 0$　なので

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}\sqrt{4(1-\cos^2 t)}\cdot(-2\sqrt{3})\sin t dt$$

$$=4\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 t\,dt=4\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt$$

$$=2\sqrt{3}\left[t-\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=2\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi-\dfrac{3}{2}$　となるから

$$S_2=\frac{3}{2}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi-\frac{3}{2}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$

したがって　$S=S_1+S_2=\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)\pi$

[**東京工業大学 1982 年 $\boxed{5}$**]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

3 つの数 0，1，2 がそれぞれ確率 $\dfrac{1}{3}$ で表れる試行を 9 回行う。ただし，各回の試行によって起こる事象どうしは独立とする。この結果得られた 9 個の平均値の小数第 1 位が 1 となる確率を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

この試行を 9 回行って得られる 9 つの数の和は 0，1，2，…，18 の 19 通りある。

これらの数のうち，9 で割って小数第 1 位が 1 となる数は 1 と 10 である。

(ⅰ) 1 のとき

0 が 8 回，1 が 1 回出るときであるから $\dfrac{9!}{8!1!}=9$ 通り

(ⅱ) 10 のとき

0 が 4 回，2 が 5 回出るとき $\dfrac{9!}{4!5!}=126$ 通り

0 が 3 回，1 が 2 回，2 が 4 回出るとき $\dfrac{9!}{3!2!4!}=1260$ 通り

0 が 2 回，1 が 4 回，2 が 3 回出るとき $\dfrac{9!}{2!4!3!}=1260$ 通り

0 が 1 回，1 が 6 回，2 が 2 回出るとき $\dfrac{9!}{1!6!2!}=252$ 通り

1 が 8 回，2 が 1 回出るとき $\dfrac{9!}{8!1!}=9$ 通り

この試行におけるすべての場合の数は 3^9 通りあって，これらは同様に確からしい。

よって求める確率は $\dfrac{9+126+1260+1260+252+9}{3^9}=\dfrac{1+14+140+140+28+1}{3^7}$

$$=\frac{324}{3^7}$$

$$=\frac{4}{27}$$