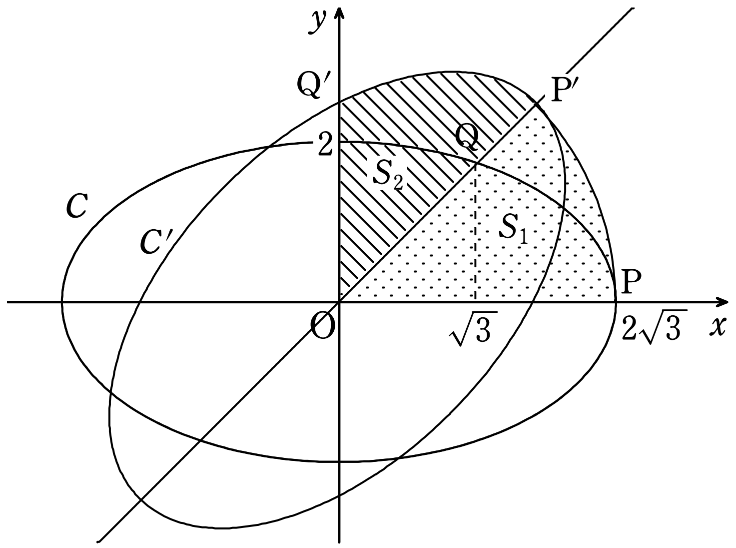
[東京工業大学 1982 年 $\boxed{4}$]

$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}\leqq 1$ で定まる領域を D とする。原点を中心とし D を正の向きに 45° 回転させるとき，D の点が通る全体は平面上の 1 つの領域をつくる。この領域の第 1 象限にある部分の面積を求めよ。

楕円 C : $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$ と x 軸との交点を P，直線 $y=x$ との交点を Q とする。



また，楕円 C を正の向きに 45° 回転させてできる楕円を C' とし，

C' と直線 $y=x$ との交点を P′， y 軸との交点を Q′ とする。

このとき，求める領域の面積 S は

「x 軸と直線 $y=x$ と原点中心，半径 $2\sqrt{3}$ の円とで囲まれる部分の面積 S_1」および

「楕円 C' と直線 $y=x$ と y 軸とで囲まれる部分の面積 S_2」との和である。

また， S_2 は楕円 C と x 軸と直線 $y=x$ とで囲まれる部分の面積に等しく，

直線 $y=x$ と楕円 C との交点の x 座標は $-\sqrt{3},\ \sqrt{3}$ であるから

$$S_1=\frac{1}{8}\cdot\pi\cdot\left(2\sqrt{3}\right)^2=\frac{3}{2}\pi$$

$$S_2=\int_0^{\sqrt{3}}x\,dx+\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\sqrt{\frac{12-x^2}{3}}\,dx$$

ここで，右辺の第 2 項の積分について

$x=2\sqrt{3}\cos t$　とおくと　$dx=-2\sqrt{3}\sin t dt$　であり，

$x:\sqrt{3}\to 2\sqrt{3}$　のとき　$t:\dfrac{\pi}{3}\to 0$　なので

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}\sqrt{4(1-\cos^2 t)}\cdot(-2\sqrt{3})\sin t dt$$

$$=4\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 t\, dt=4\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt$$

$$=2\sqrt{3}\left[t-\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=2\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi-\dfrac{3}{2}$　となるから

$$S_2=\frac{3}{2}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi-\frac{3}{2}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$

したがって　$S=S_1+S_2=\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)\pi$