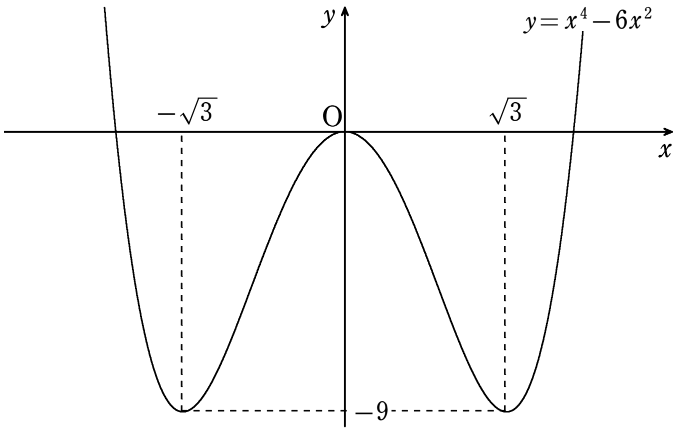
[東京工業大学 1982 年 $\boxed{3}$]

曲線 $y=x^4-6x^2$ を C とし，不等式 $y>x^4-6x^2$ で定まる領域内の点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ から異なる 4 本の接線が C に引けるとする。このとき，点 P の動きうる領域 D を求め図示せよ。

$y=x^4-6x^2$ より曲線 C は y 軸に関して対称なグラフで，

$y'=4x^3-12x=4x\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)$ より C の概形は次の図のようになる。



C 上の点 $(t,\ t^4-6t^2)$ における接線の方程式は

$y-(t^4-6t^2)=(4t^3-12t)(x-t)$ であり，これが $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ を通るとき

$\beta-(t^4-6t^2)=(4t^3-12t)(\alpha-t) \iff 3t^4-4\alpha t^3-6t^2+12\alpha t+\beta=0$ となる。

ここで，$f(t)=3t^4-4\alpha t^3-6t^2+12\alpha t+\beta$ とおく。

不等式 $y>x^4-6x^2$ で定まる領域内の点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ から異なる 4 本の接線が C に引けるということは

$\beta>\alpha^4-6\alpha^2$ のもとで，$f(t)=0$ が異なる 4 つの実数解をもつということに他ならない。

また，グラフの対称性から $\alpha \geqq 0$ として考える。

$f(t)=3t^4-4\alpha t^3-6t^2+12\alpha t+\beta$ より

$f'(t)=12t^3-12\alpha t^2-12t+12\alpha$

$=12(t-\alpha)(t+1)(t-1)$ である。

（i）$0 \leqq \alpha<1$ のとき

$f(t)=0$ が異なる 4 つの実数解をもつのは，「$f(-1)<0$ かつ $f(1)<0$」のときで，

「$3+4\alpha-6-12\alpha+\beta<0$ かつ $3-4\alpha-6+12\alpha+\beta<0$」

$\iff$「$\beta<8\alpha+3$」かつ「$\beta<-8\alpha+3$」

$\Leftrightarrow\ \beta < -8\alpha + 3$

（ⅱ）$\alpha = 1$ のとき

$y = f(t)$ は極小値を 1 つしかもたないので，$f(t) = 0$ が異なる 4 つの実数解をもつことはない。

（ⅲ）$\alpha > 1$ のとき

$f(t) = 0$ が異なる 4 つの実数解をもつのは，「$f(-1) < 0$ かつ $f(\alpha) < 0$」のときで，

「$3 + 4\alpha - 6 - 12\alpha + \beta < 0$ かつ $-\alpha^4 + 6\alpha^2 + \beta < 0$」

$\Leftrightarrow$「$\beta < 8\alpha + 3$」かつ「$\beta < \alpha^4 - 6\alpha^2$」

となるが，これは 2 つ目の式が $\beta > \alpha^4 - 6\alpha^2$ を満たさないので，不適。

したがって，対称性を考えると求める領域は

$y > x^4 - 6x^2$ かつ $y < -8x + 3$ かつ $y < 8x + 3$

となり，図の斜線部のようになる。ただし，境界線上の点は含まない。