[東京工業大学 1982 年 $\boxed{2}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

平面上の原点 O を中心とする半径 1 の円 C の周上に，同一直径上にない異なる 2 点 A, B をとる。

A, B の位置ベクトルを $\vec{a},\ \vec{b}$ とし，$L=\{m\vec{a}+n\vec{b}\,|\,m,\ n$ は整数$\}$ とする。

(1) 零ベクトルでない，L の元の大きさの最小値 r は $1,\ |\vec{a}+\vec{b}|,\ |\vec{a}-\vec{b}|$ のうちの最小のものに等しいことを証明せよ。

(2) 2 点 A, B が $r=1$ を満たして C の周上を動くとき，△OAB の面積 S の最小値を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) $\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とおく。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ であり，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ である。

$f(m,\ n)=\left|m\vec{a}+n\vec{b}\right|^2$ とおくと，

$f(m,\ n)=m^2+2mn\vec{a}\cdot\vec{b}+n^2=m^2+n^2+2mn\cos\theta$

（ i ）$mn=0$（ただし，$m=n=0$ を除く）のとき

$f(m,\ n)=m^2+n^2\geqq 1$ であり，

等号成立は $(m,\ n)=(\pm1,\ 0),\ (0,\ \pm1)$ のときである。

このとき，$f(m,\ n)$ の最小値は $\left|\vec{a}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2=1$ となる。

（ii）$mn>0$ のとき

$f(m,\ n)=(m-n)^2+2mn+2mn\cos\theta$

$=(m-n)^2+2mn(1+\cos\theta)$

$\geqq 2(1+\cos\theta)$ であり，

等号成立は $m-n=0,\ mn=1$ すなわち $(m,\ n)=(1,\ 1),\ (-1,\ -1)$ のときである。

このとき，$f(m,\ n)$ の最小値は $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|-\vec{a}-\vec{b}|^2=2(1+\cos\theta)$ となる。

（iii）$mn<0$ のとき

$f(m,\ n)=(m+n)^2-2mn+2mn\cos\theta$

$=(m+n)^2-2mn(1-\cos\theta)$

$\geqq 2(1-\cos\theta)$ であり，

等号成立は $m+n=0,\ mn=-1$ すなわち $(m,\ n)=(1,\ -1),\ (-1,\ 1)$ のときである。

このとき， $f(m,\ n)$ の最小値は $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|-\vec{a}+\vec{b}|^2=2(1-\cos\theta)$ となる。

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)より，L の元の大きさの最小値 r は $1,\ |\vec{a}+\vec{b}|,\ |\vec{a}-\vec{b}|$ のうちの最小のものとなる。

⑵ $r=1$ となるような θ の範囲を求める。

3 つの最小値候補 $1,\ \sqrt{2(1+\cos\theta)},\ \sqrt{2(1-\cos\theta)}$ において $r=1$ となるのは

$1\leqq\sqrt{2(1+\cos\theta)}$ かつ $1\leqq\sqrt{2(1-\cos\theta)}$ となるときである。

これを解くと $-\dfrac{1}{2}\leqq\cos\theta\leqq\dfrac{1}{2}$ であり，

θ は 2 つのベクトルのなす角なので $0\leqq\theta\leqq\pi$ としてよいから $\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ となる。

この範囲において

$$\triangle\mathrm{OAB}\text{の面積} S=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\sin\theta$$

$$\geqq\frac{\sqrt{3}}{4}$$

等号成立は $\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi$ のとき。

よって，求める最小値は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$