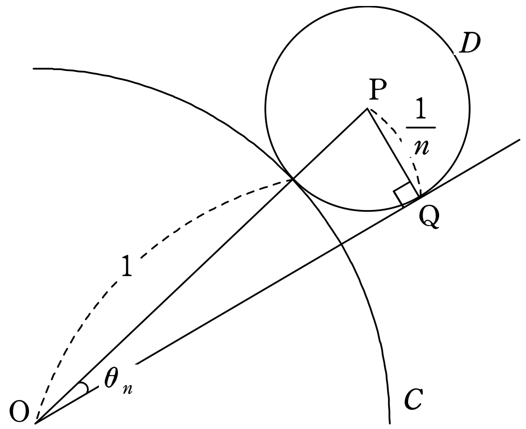
[**東京工業大学 1982 年 $\boxed{1}$**]

n を自然数とする。半径 $\dfrac{1}{n}$ の円を互いに重なり合わないように半径 1 の円に外接させる。このとき外接する円の最大個数を a_n とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ を求めよ。

円 C の中心を O とする。この円に外接する半径 $\dfrac{1}{n}$ の円 D の中心を P とする。

O から円 D に接線を 1 つ引き，その接点を Q とする。



このとき，$\angle\mathrm{POQ}=\theta_n$ とすると題意の条件から

$$2\pi-2\theta_n<2\theta_n\times a_n<2\pi$$

が成り立つ。

両辺を $2n\theta_n$ で割って

$$\frac{\pi}{n\theta_n}-\frac{1}{n}<\frac{a_n}{n}<\frac{\pi}{n\theta_n}$$

ここで，$\sin\theta_n=\dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{n+1}$

また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\theta_n=0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\theta_n}{\theta_n}=1$ なので

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n\theta_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n\theta_n}\cdot\frac{\sin\theta_n}{\sin\theta_n}\\&=\lim_{n\to\infty}\pi\cdot\frac{\sin\theta_n}{\theta_n}\cdot\frac{1}{n\left(\dfrac{1}{n+1}\right)}\\&=\lim_{n\to\infty}\pi\cdot\frac{\sin\theta_n}{\theta_n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\\&=\pi\end{aligned}$$

となることがわかる。これにより $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{n\theta_n}-\frac{1}{n}\right)=\pi$ もわかる。

よって，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\pi$