[東京工業大学 1981 年 $\boxed{1}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

α は $0<\alpha<1$ を満たす実数とする。任意の自然数 n に対して，$2^{n-1}\alpha$ の整数部分を a_n とし，$2^{n-1}\alpha=a_n+b_n$ とおくと，n が奇数のとき $0\leqq b_n<\dfrac{1}{2}$，n が偶数のとき $\dfrac{1}{2}<b_n<1$ になるという。a_n および α を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$2^{n-1}\alpha=a_n+b_n$ …① の n に $2n-1,\ 2n,\ 2n+1$ を代入して

$2^{2n-2}\alpha=a_{2n-1}+b_{2n-1}$ …②

$2^{2n-1}\alpha=a_{2n}+b_{2n}$ …③

$2^{2n}\alpha=a_{2n+1}+b_{2n+1}$ …④

②，③より $a_{2n}+b_{2n}=2a_{2n-1}+2b_{2n-1}$

$a_{2n},\ 2a_{2n-1}$ は整数であり，$\dfrac{1}{2}<b_{2n}<1,\ 0\leqq 2b_{2n-1}<1$ より $a_{2n}=2a_{2n-1}$ …⑤

③，④より $a_{2n+1}+b_{2n+1}=2a_{2n}+2b_{2n}$

$a_{2n+1},\ 2a_{2n}$ は整数であり，$0\leqq b_{2n+1}<\dfrac{1}{2},\ 1<2b_{2n}<2$ より $a_{2n+1}=2a_{2n}+1$ …⑥

⑤，⑥より a_{2n+1} を a_{2n-1} で，$a_{2(n+1)}$ を a_{2n} でそれぞれ表すと

$a_{2n+1}=2a_{2n}+1=4a_{2n-1}+1$ …⑦

$a_{2(n+1)}=2a_{2(n+1)-1}=2a_{2n+1}=4a_{2n}+2$ …⑧

⑦を解くと，$a_{2n-1}=-\dfrac{1}{3}+\left(a_1+\dfrac{1}{3}\right)4^{n-1}$ であり，

①より $n=1$ のとき $\alpha=a_1+b_1$ で，$0<\alpha<1$，$0\leqq b_1<\dfrac{1}{2}$ より $a_1=0$

したがって $a_{2n-1}=\dfrac{1}{3}\left(4^{n-1}-1\right)$

⑧を解くと，$a_{2n}=-\dfrac{2}{3}+\left(a_2+\dfrac{2}{3}\right)4^{n-1}$ であり，

$a_1=0$ より $\alpha=b_1$ なので，$0<\alpha<\dfrac{1}{2}$

さらに①より $n=2$ のとき $2\alpha=a_2+b_2$ から $0<a_2+b_2<1$，$\dfrac{1}{2}<b_2<1$ より $a_2=0$

よって $a_{2n}=\dfrac{2}{3}\left(4^{n-1}-1\right)$

①より $\alpha=\dfrac{a_n+b_n}{2^{n-1}}$ であり，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{2^{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}\left(4^{n-1}-1\right)}{2^{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{2n-2}}\right)=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n-1}}{2^{2n-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\left(4^{n-1}-1\right)}{2^{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{2n-2}}\right)=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{2^{n-1}}=0$$

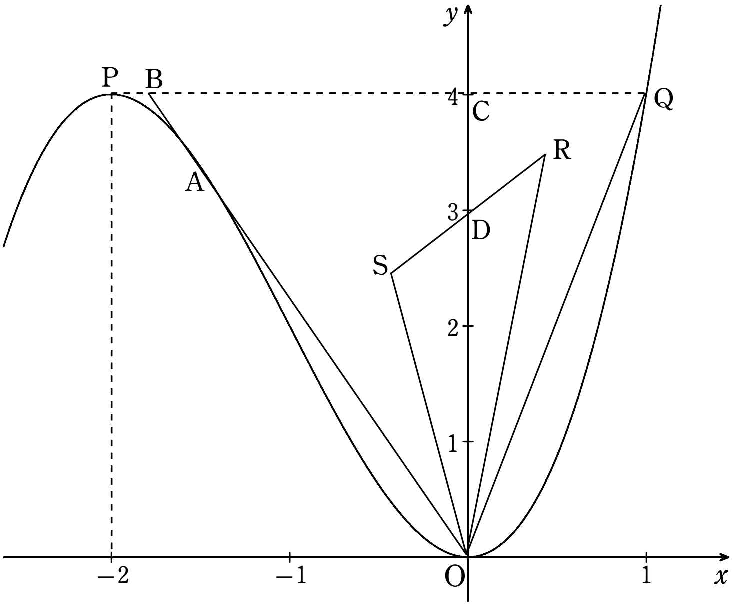
となることから $\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+b_n}{2^{n-1}}=\dfrac{1}{3}$

[東京工業大学 1981 年 $\boxed{2}$]

曲線 $y=x^3+3x^2$ 上に 3 点 O(0, 0), P(−2, 4), Q(1, 4) をとり，曲線および線分 PQ で囲まれた領域を D とする（D は境界を含む)。点 R を第 1 象限，点 S を第 2 象限にとり，△ORS が D に含まれるように点 R, S を動かすとき，△ORS の面積の最大値を求めよ。

$y=x^3+3x^2$ より $y'=3x^2+6x=3x(x+2)$

したがって，$y=x^3+3x^2$ のグラフは次の図のようになる。



O から $y=x^3+3x^2$ の接線を引き，その接点を A，直線 PQ との交点を B とする。

△ORS が領域 D に含まれることから，S は曲線 $y=x^3+3x^2$ と線分 AB および線分 PB で囲まれる部分には入らない（ただし，線分 AB 上の点は除く)。

その部分を除き，領域 D の中に条件を満たすように 2 点 R, S をとると，

y 軸と線分 BQ，線分 RS の交点をそれぞれ C, D として，

△ODS ≦ △OCB，△ORD ≦ △OQC が成り立つ。

よって，△OQB が条件を満たす三角形の中で面積最大のものである。

A の x 座標を t とおくと，A での接線の方程式は

$y-(t^3+3t^2)=(3t^2+6t)(x-t)$

これが O(0, 0) を通るので，$-t^3-3t^2=-3t^3-6t^2$ より $t=-\dfrac{3}{2}$

よって接線の方程式は $y=-\dfrac{9}{4}x$ となり，点Bの座標は $\left(-\dfrac{16}{9},\ 4\right)$ となる。

したがって，△OQBの面積は $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{25}{9}\cdot 4=\dfrac{50}{9}$

[東京工業大学 1981 年 $\boxed{3}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――☆

3 点 P, Q, R はそれぞれ原点 O を中心とする半径 1，2，3 の円周上で，正の向きに角速度 1，2，3 の等速円運動をしている動点とする。△PQR の面積の最大値を求めよ。ただし，ある時刻において 2 点 P, Q は線分 OR 上にあるとする。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――☆

2 点 P, Q が線分 OR 上にある，すなわち 3 点が一直線上に並んだ状態を $\theta=0$ とする。
3 点 P, Q, R はそれぞれ原点 O を中心とする半径 1，2，3 の円周上で，正の向きに角速度 1，2，3 の等速円運動をしている動点であるが，P(1, 0) として固定すると，相対的には Q, R が半径 2，3 の円周上でそれぞれ角速度 1，2 の等速円運動をしていると考えられる。

そこで，$\mathrm{P}(1,\ 0),\ \mathrm{Q}(2\cos\theta,\ 2\sin\theta),\ \mathrm{R}(3\cos2\theta,\ 3\sin2\theta)$ とおく。

△PQR の面積を $S(\theta)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(2\cos\theta-1,\ 2\sin\theta)$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(3\cos2\theta-1,\ 3\sin2\theta)$ より

$$
\begin{aligned}
S(\theta)&=\frac{1}{2}\left|(2\cos\theta-1)\cdot3\sin2\theta-2\sin\theta\cdot(3\cos2\theta-1)\right|\\
&=\frac{1}{2}\left|6\cos\theta\sin2\theta-3\sin2\theta-6\sin\theta\cos2\theta+2\sin\theta\right|\\
&=\frac{1}{2}\left|12\sin\theta\cos^2\theta-6\sin\theta\cos\theta-6\sin\theta(1-2\sin^2\theta)+2\sin\theta\right|\\
&=\frac{1}{2}\left|12\sin\theta\cos^2\theta-6\sin\theta\cos\theta-6\sin\theta+12\sin^3\theta+2\sin\theta\right|\\
&=\frac{1}{2}\left|12\sin\theta(1-\sin^2\theta)-6\sin\theta\cos\theta-4\sin\theta+12\sin^3\theta\right|\\
&=\frac{1}{2}\left|12\sin\theta-12\sin^3\theta-6\sin\theta\cos\theta-4\sin\theta+12\sin^3\theta\right|\\
&=\frac{1}{2}\left|8\sin\theta-6\sin\theta\cos\theta\right|\\
&=\left|4\sin\theta-3\sin\theta\cos\theta\right|
\end{aligned}
$$

となる。

ここで，$f(\theta)=4\sin\theta-3\sin\theta\cos\theta$ とおくと

$$
\begin{aligned}
f'(\theta)&=4\cos\theta-3(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\\
&=4\cos\theta-3(2\cos^2\theta-1)
\end{aligned}
$$

$$=-6\cos^2\theta+4\cos\theta+3$$

$$=-6\left(\cos\theta-\frac{2+\sqrt{22}}{6}\right)\left(\cos\theta-\frac{2-\sqrt{22}}{6}\right)$$

となり，$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ であるから $-1\leqq\dfrac{2-\sqrt{22}}{6}\leqq1$，$\dfrac{2+\sqrt{22}}{6}\geqq1$ より

$f(\theta)$ の増減は下表に従う。

$\cos\theta$	-1	$\cdots$	$\dfrac{2-\sqrt{22}}{6}$	$\cdots$	1
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$	-4	↗	極大	↘	0

よって，$S(\theta)=|f(\theta)|$ の最大値は，4 と「$\cos\theta=\dfrac{2-\sqrt{22}}{6}$ のときの $S(\theta)$」の小さくない方

である。

次に，$\cos\theta=\dfrac{2-\sqrt{22}}{6}$ のときの $S(\theta)$ の値を求める。

$4-3\cos\theta>0$ より

$$S(\theta)=|\sin\theta|(4-3\cos\theta)$$

$$=|\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}|\left(4-3\cos\theta\right)$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{2-\sqrt{22}}{6}\right)^2}\left(4-3\cdot\frac{2-\sqrt{22}}{6}\right)$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{4-4\sqrt{22}+22}{36}\right)}\left(4-\frac{2-\sqrt{22}}{2}\right)$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{13-2\sqrt{22}}{18}\right)}\left(\frac{6+\sqrt{22}}{2}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{5+2\sqrt{22}}{18}}\left(\frac{6+\sqrt{22}}{2}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{5+2\sqrt{22}}{18}\cdot\left(\frac{6+\sqrt{22}}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{5+2\sqrt{22}}{18}\cdot\frac{29+6\sqrt{22}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{409+88\sqrt{22}}{36}}$$

$$=\frac{\sqrt{409+88\sqrt{22}}}{6}$$

となる。さらに，この値と 4 との大小を比較すると，$4=\dfrac{24}{6}=\dfrac{\sqrt{576}}{6}$ であることと

$\left(409+88\sqrt{22}\right)-576=88\sqrt{22}-167>88\cdot\sqrt{4}-167=9>0$ より $\dfrac{\sqrt{409+88\sqrt{22}}}{6}>4$ となる。

よって，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積の最大値は $\dfrac{\sqrt{409+88\sqrt{22}}}{6}$

［ 東京工業大学 1981 年 $\boxed{4}$ ］

☆────────────────────────☆

区間 $0<t\leqq 1$ において $F(t)=\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}t}|\cos 2x|\,dx$ とおく。

(1) $\displaystyle\lim_{t\to 0}F(t)$ を求めよ。

(2) $F(t)\geqq 1$ となる t の範囲を求めよ。

☆────────────────────────☆

(1) $\cos 2x\geqq 0$ となるのは $0\leqq 2x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ のとき。

積分区間が $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ になるのは $0<t\leqq\dfrac{1}{2}$ のときである。

絶対値記号をはずすため，次のように場合分けをする。

(i) $0<t\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき

$$F(t)=\frac{1}{t}\int_0^{\frac{\pi}{2}t}\cos 2x\,dx=\frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}t}=\frac{\sin\pi t}{2t}$$

となる。

(ii) $\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 1$ のとき

$$F(t)=\frac{1}{t}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}t}(-\cos 2x)\,dx\right\}$$

$$=\frac{1}{t}\left\{\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}t}\right\}$$

$$=\frac{1}{t}\left\{\frac{1}{2}-\left(\frac{\sin\pi t}{2}-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{2-\sin\pi t}{2t}$$

となる。

$\displaystyle\lim_{t\to 0}F(t)$ を考えるのは(i)の場合でよく，

$$\lim_{t\to 0}F(t)=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\pi t}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\pi t}{\pi t}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$ となる。

⑵（ⅰ） $0<t\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき

$F(t)=\dfrac{\sin\pi t}{2t}$ 　より　$F'(t)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi t\cos\pi t-\sin\pi t}{t^2}\right)$

$g(t)=\pi t\cos\pi t-\sin\pi t$ 　とおくと　$g'(t)=\pi\cos\theta t-\pi^2 t\sin\pi t-\pi\cos\pi t$

$$=-\pi^2 t\sin\pi t<0$$

$g(0)=0$ と合わせて $g(t)<0$ であり，したがって $F'(t)<0$ となる。

（ⅱ） $\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 1$ のとき

$$F(t)=\frac{2-\sin\pi t}{2t} \quad \text{より} \quad F'(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{-\pi t\cos\pi t-(2-\sin\pi t)\cdot 1}{t^2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{-\pi t\cos\pi t+\sin\pi t-2}{t^2}\right)$$

$h(t)=-\pi t\cos\pi t+\sin\pi t-2$ 　とおくと　$h'(t)=-\pi\cos\pi t+\pi^2 t\sin\pi t+\pi\cos\pi t$

$$=\pi^2 t\sin\pi t$$

$\dfrac{1}{2}<t<1$ においては $h'(t)>0$ である。

$h\left(\dfrac{1}{2}\right)=-1,\ h(1)=\pi-2>0$ であることを合わせて考えると中間値の定理より

$\dfrac{1}{2}<t_0<1$ を満たす t_0 が存在して $h(t_0)=0$，すなわち $F(t_0)=0$ となる。

さらに $\dfrac{1}{2}<t<t_0$ では $F'(t)<0$，$\dfrac{1}{2}<t<t_0$ では $F'(t)>0$ が成り立つ。

以上より $F(t)$ の増減は下表に従う。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	t_0	$\cdots$	1
$F'(t)$		－	－	－	0	＋	
$F(t)$		↘	1	↘		↗	1

よって，$F(t)\geqq 1$ となる t の範囲は $0<t\leqq\dfrac{1}{2},\ t=1$