[東京工業大学 1981 年 $\boxed{4}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

区間 $0<t\leqq 1$ において $F(t)=\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}t}|\cos 2x|\,dx$ とおく。

(1) $\displaystyle\lim_{t\to 0}F(t)$ を求めよ。

(2) $F(t)\geqq 1$ となる t の範囲を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) $\cos 2x\geqq 0$ となるのは $0\leqq 2x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ のとき。

積分区間が $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ になるのは $0<t\leqq\dfrac{1}{2}$ のときである。

絶対値記号をはずすため，次のように場合分けをする。

（ｉ）$0<t\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき

$$F(t)=\frac{1}{t}\int_0^{\frac{\pi}{2}t}\cos 2x\,dx=\frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}t}=\frac{\sin\pi t}{2t}$$

となる。

（ii）$\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 1$ のとき

$$F(t)=\frac{1}{t}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}t}(-\cos 2x)\,dx\right\}$$

$$=\frac{1}{t}\left\{\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}t}\right\}$$

$$=\frac{1}{t}\left\{\frac{1}{2}-\left(\frac{\sin\pi t}{2}-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{2-\sin\pi t}{2t}$$

となる。

$\displaystyle\lim_{t\to 0}F(t)$ を考えるのは(ｉ)の場合でよく，

$$\lim_{t\to 0}F(t)=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\pi t}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\pi t}{\pi t}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$ となる。

⑵ (ⅰ) $0<t\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき

$F(t)=\dfrac{\sin\pi t}{2t}$ より $F'(t)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi t\cos\pi t-\sin\pi t}{t^2}\right)$

$g(t)=\pi t\cos\pi t-\sin\pi t$ とおくと $g'(t)=\pi\cos\theta t-\pi^2 t\sin\pi t-\pi\cos\pi t$

$$=-\pi^2 t\sin\pi t<0$$

$g(0)=0$ と合わせて $g(t)<0$ であり，したがって $F'(t)<0$ となる。

(ⅱ) $\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 1$ のとき

$F(t)=\dfrac{2-\sin\pi t}{2t}$ より $F'(t)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-\pi t\cos\pi t-(2-\sin\pi t)\cdot 1}{t^2}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{-\pi t\cos\pi t+\sin\pi t-2}{t^2}\right)$$

$h(t)=-\pi t\cos\pi t+\sin\pi t-2$ とおくと $h'(t)=-\pi\cos\pi t+\pi^2 t\sin\pi t+\pi\cos\pi t$

$$=\pi^2 t\sin\pi t$$

$\dfrac{1}{2}<t<1$ においては $h'(t)>0$ である。

$h\left(\dfrac{1}{2}\right)=-1,\ h(1)=\pi-2>0$ であることを合わせて考えると中間値の定理より

$\dfrac{1}{2}<t_0<1$ を満たす t_0 が存在して $h(t_0)=0$，すなわち $F(t_0)=0$ となる。

さらに $\dfrac{1}{2}<t<t_0$ では $F'(t)<0$，$\dfrac{1}{2}<t<t_0$ では $F'(t)>0$ が成り立つ。

以上より $F(t)$ の増減は下表に従う。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	t_0	$\cdots$	1
$F'(t)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$F(t)$		↘	1	↘		↗	1

よって，$F(t)\geqq 1$ となる t の範囲は $0<t\leqq\dfrac{1}{2},\ t=1$