[東京工業大学 1981 年 $\boxed{3}$]

☆────────────────────────────☆

3 点 P, Q, R はそれぞれ原点 O を中心とする半径 1，2，3 の円周上で，正の向きに角速度 1，2，3 の等速円運動をしている動点とする。△PQR の面積の最大値を求めよ。ただし，ある時刻において 2 点 P, Q は線分 OR 上にあるとする。

☆────────────────────────────☆

2 点 P, Q が線分 OR 上にある，すなわち 3 点が一直線上に並んだ状態を $\theta=0$ とする。

3 点 P, Q, R はそれぞれ原点 O を中心とする半径 1，2，3 の円周上で，正の向きに角速度 1，2，3 の等速円運動をしている動点であるが，P(1, 0) として固定すると，相対的には Q, R が半径 2，3 の円周上でそれぞれ角速度 1，2 の等速円運動をしていると考えられる。

そこで，$\mathrm{P}(1,\ 0),\ \mathrm{Q}(2\cos\theta,\ 2\sin\theta),\ \mathrm{R}(3\cos 2\theta,\ 3\sin 2\theta)$ とおく。

△PQR の面積を $S(\theta)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(2\cos\theta-1,\ 2\sin\theta)$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(3\cos 2\theta-1,\ 3\sin 2\theta)$ より

$$
\begin{aligned}
S(\theta)&=\frac{1}{2}\left|(2\cos\theta-1)\cdot 3\sin 2\theta-2\sin\theta\cdot(3\cos 2\theta-1)\right|\\
&=\frac{1}{2}\left|6\cos\theta\sin 2\theta-3\sin 2\theta-6\sin\theta\cos 2\theta+2\sin\theta\right|\\
&=\frac{1}{2}\left|12\sin\theta\cos^2\theta-6\sin\theta\cos\theta-6\sin\theta(1-2\sin^2\theta)+2\sin\theta\right|\\
&=\frac{1}{2}\left|12\sin\theta\cos^2\theta-6\sin\theta\cos\theta-6\sin\theta+12\sin^3\theta+2\sin\theta\right|\\
&=\frac{1}{2}\left|12\sin\theta(1-\sin^2\theta)-6\sin\theta\cos\theta-4\sin\theta+12\sin^3\theta\right|\\
&=\frac{1}{2}\left|12\sin\theta-12\sin^3\theta-6\sin\theta\cos\theta-4\sin\theta+12\sin^3\theta\right|\\
&=\frac{1}{2}\left|8\sin\theta-6\sin\theta\cos\theta\right|\\
&=\left|4\sin\theta-3\sin\theta\cos\theta\right|
\end{aligned}
$$

となる。

ここで，$f(\theta)=4\sin\theta-3\sin\theta\cos\theta$ とおくと

$$
\begin{aligned}
f'(\theta)&=4\cos\theta-3(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\\
&=4\cos\theta-3(2\cos^2\theta-1)
\end{aligned}
$$

$$=-6\cos^2\theta+4\cos\theta+3$$

$$=-6\left(\cos\theta-\frac{2+\sqrt{22}}{6}\right)\left(\cos\theta-\frac{2-\sqrt{22}}{6}\right)$$

となり，$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ であるから $-1\leqq\frac{2-\sqrt{22}}{6}\leqq1$，$\frac{2+\sqrt{22}}{6}\geqq1$ より

$f(\theta)$ の増減は下表に従う。

$\cos\theta$	-1	$\cdots$	$\frac{2-\sqrt{22}}{6}$	$\cdots$	1
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$	-4	↗	極大	↘	0

よって，$S(\theta)=|f(\theta)|$ の最大値は，4 と「$\cos\theta=\frac{2-\sqrt{22}}{6}$ のときの $S(\theta)$」の小さくない方である。

次に，$\cos\theta=\frac{2-\sqrt{22}}{6}$ のときの $S(\theta)$ の値を求める。

$4-3\cos\theta>0$ より

$$S(\theta)=|\sin\theta|(4-3\cos\theta)$$

$$=|\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}|(4-3\cos\theta)$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{2-\sqrt{22}}{6}\right)^2}\left(4-3\cdot\frac{2-\sqrt{22}}{6}\right)$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{4-4\sqrt{22}+22}{36}\right)}\left(4-\frac{2-\sqrt{22}}{2}\right)$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{13-2\sqrt{22}}{18}\right)}\left(\frac{6+\sqrt{22}}{2}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{5+2\sqrt{22}}{18}}\left(\frac{6+\sqrt{22}}{2}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{5+2\sqrt{22}}{18}\cdot\left(\frac{6+\sqrt{22}}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{5+2\sqrt{22}}{18}\cdot\frac{29+6\sqrt{22}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{409+88\sqrt{22}}{36}}$$

$$=\frac{\sqrt{409+88\sqrt{22}}}{6}$$

となる。さらに，この値と4との大小を比較すると，$4=\frac{24}{6}=\frac{\sqrt{576}}{6}$ であることと

$\left(409+88\sqrt{22}\right)-576=88\sqrt{22}-167>88\cdot\sqrt{4}-167=9>0$ より $\frac{\sqrt{409+88\sqrt{22}}}{6}>4$ となる。

よって，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積の最大値は $\frac{\sqrt{409+88\sqrt{22}}}{6}$