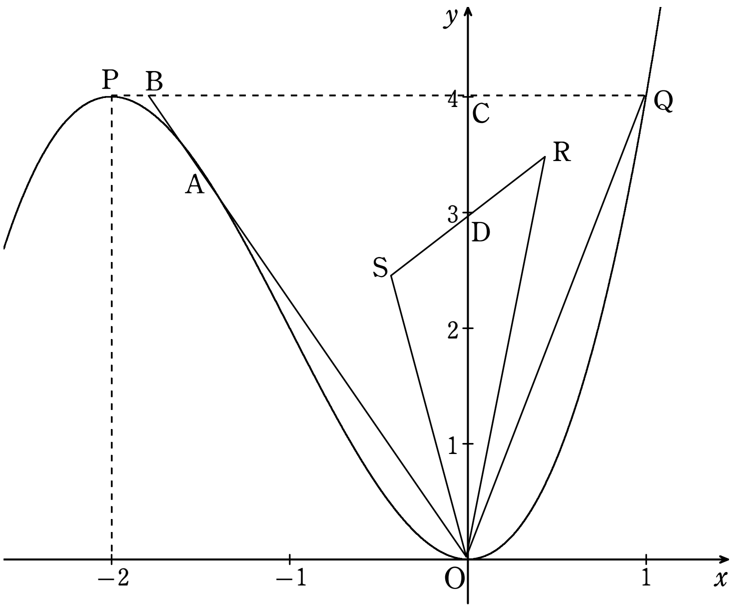
[東京工業大学 1981 年 $\boxed{2}$]

曲線 $y=x^3+3x^2$ 上に 3 点 O(0, 0), P(−2, 4), Q(1, 4) をとり，曲線および線分 PQ で囲まれた領域を D とする（D は境界を含む)。点 R を第 1 象限，点 S を第 2 象限にとり，△ORS が D に含まれるように点 R, S を動かすとき，△ORS の面積の最大値を求めよ。

$y=x^3+3x^2$ より $y'=3x^2+6x=3x(x+2)$

したがって，$y=x^3+3x^2$ のグラフは次の図のようになる。



O から $y=x^3+3x^2$ の接線を引き，その接点を A，直線 PQ との交点を B とする。

△ORS が領域 D に含まれることから，S は曲線 $y=x^3+3x^2$ と線分 AB および線分 PB で囲まれる部分には入らない（ただし，線分 AB 上の点は除く)。

その部分を除き，領域 D の中に条件を満たすように 2 点 R, S をとると，

y 軸と線分 BQ，線分 RS の交点をそれぞれ C, D として，

△ODS ≦ △OCB，△ORD ≦ △OQC が成り立つ。

よって，△OQB が条件を満たす三角形の中で面積最大のものである。

A の x 座標を t とおくと，A での接線の方程式は

$y-(t^3+3t^2)=(3t^2+6t)(x-t)$

これが O(0, 0) を通るので，$-t^3-3t^2=-3t^3-6t^2$ より $t=-\dfrac{3}{2}$

よって接線の方程式は $y=-\dfrac{9}{4}x$ となり，点Bの座標は $\left(-\dfrac{16}{9},\,4\right)$ となる。

したがって，△OQBの面積は $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{25}{9}\cdot4=\dfrac{50}{9}$