[東京工業大学 1981 年 $\boxed{1}$]

α は $0<\alpha<1$ を満たす実数とする。任意の自然数 n に対して，$2^{n-1}\alpha$ の整数部分を a_n とし，$2^{n-1}\alpha=a_n+b_n$ とおくと，n が奇数のとき $0\leqq b_n<\frac{1}{2}$，n が偶数のとき $\frac{1}{2}<b_n<1$ になるという。a_n および α を求めよ。

$2^{n-1}\alpha=a_n+b_n$ …① の n に $2n-1,\ 2n,\ 2n+1$ を代入して

$2^{2n-2}\alpha=a_{2n-1}+b_{2n-1}$ …②

$2^{2n-1}\alpha=a_{2n}+b_{2n}$ …③

$2^{2n}\alpha=a_{2n+1}+b_{2n+1}$ …④

②，③より $a_{2n}+b_{2n}=2a_{2n-1}+2b_{2n-1}$

$a_{2n},\ 2a_{2n-1}$ は整数であり，$\frac{1}{2}<b_{2n}<1,\ 0\leqq 2b_{2n-1}<1$ より $a_{2n}=2a_{2n-1}$ …⑤

③，④より $a_{2n+1}+b_{2n+1}=2a_{2n}+2b_{2n}$

$a_{2n+1},\ 2a_{2n}$ は整数であり，$0\leqq b_{2n+1}<\frac{1}{2},\ 1<2b_{2n}<2$ より $a_{2n+1}=2a_{2n}+1$ …⑥

⑤，⑥より a_{2n+1} を a_{2n-1} で，$a_{2(n+1)}$ を a_{2n} でそれぞれ表すと

$a_{2n+1}=2a_{2n}+1=4a_{2n-1}+1$ …⑦

$a_{2(n+1)}=2a_{2(n+1)-1}=2a_{2n+1}=4a_{2n}+2$ …⑧

⑦を解くと，$a_{2n-1}=-\frac{1}{3}+\left(a_1+\frac{1}{3}\right)4^{n-1}$ であり，

①より $n=1$ のとき $\alpha=a_1+b_1$ で，$0<\alpha<1$，$0\leqq b_1<\frac{1}{2}$ より $a_1=0$

したがって $a_{2n-1}=\frac{1}{3}\left(4^{n-1}-1\right)$

⑧を解くと，$a_{2n}=-\frac{2}{3}+\left(a_2+\frac{2}{3}\right)4^{n-1}$ であり，

$a_1 = 0$ より $\alpha = b_1$ なので，$0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$

さらに①より $n = 2$ のとき $2\alpha = a_2 + b_2$ から $0 < a_2 + b_2 < 1$，$\dfrac{1}{2} < b_2 < 1$ より $a_2 = 0$

よって $a_{2n} = \dfrac{2}{3}\left(4^{n-1} - 1\right)$

①より $\alpha = \dfrac{a_n + b_n}{2^{n-1}}$ であり，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{2^{2n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}\left(4^{n-1}-1\right)}{2^{2n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^{2n-2}}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n-1}}{2^{2n-2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\left(4^{n-1}-1\right)}{2^{2n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^{2n-2}}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{2^{n-1}} = 0$$

となることから $\alpha = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n + b_n}{2^{n-1}} = \frac{1}{3}$