# [ 東京工業大学 1980 年 $\boxed{1}$ ]

$A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$とし，$B$ を $AB=BA$ を満たす 2 行 2 列の行列とする。$B$ で定まる 1 次変換 $f$ で平面上の点 $\mathrm{P}(1,1)$ が $\mathrm{P}$ と異なる点 $\mathrm{Q}(t,\ t^3)$ にうつされるとする。次の問に答えよ。

(1) $t$ を求めよ。

(2) $f$ によって動かない平面上の点の集合が直線のとき，$B$ を求めよ。

---

(1) $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ とおくと $AB=BA$ より

$$\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3a-2c & 3b-2d\\ -2a+3c & -2b+3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a-2b & -2a+3b\\ 3c-2d & -2c+3d\end{pmatrix}$$

成分を比較して $\begin{cases}3a-2c=3a-2b\\ 3b-2d=-2a+3b\\ -2a+3c=3c-2d\\ -2b+3d=-2c+3d\end{cases}$

これより $b=c,\ a=d$ を得る。

よって $B=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}$ とおくと $\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\ t^3\end{pmatrix}$ より $a+b=t$ かつ $b+a=t^3$

$t=t^3$ より $t(t+1)(t-1)=0$ よって $t=0,\ \pm1$

$\mathrm{P},\ \mathrm{Q}$ は異なる点なので，$t=0,\ -1$ である。

(2) (i) $t=0$ のとき

$a+b=0$ であるから $b=-a$

$B$ で定まる 1 次変換 $f$ の不動点を $(x,\ y)$ とすると

$$\begin{pmatrix}a & -a\\ -a & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

これより $ax-ay=x$ かつ $-ax+ay=y$ …①

辺々加えて $x+y=0$ より $y=-x$，これと①より $(2a-1)x=0$

$a\neq\dfrac{1}{2}$ のときは $x=0,\ y=0$ となり，$f$ の不動点の集合は 1 点 $(0,\ 0)$ になる。

$a=\dfrac{1}{2}$ のときは $y=-x$ となり， $f$ の不動点の集合は，直線 $y=-x$ になる。

（ii） $t=-1$ のとき

$a+b=-1$ であるから $b=-a-1$

$B$ で定まる１次変換 $f$ の不動点を $(x,\ y)$ とすると

$$\begin{pmatrix} a & -a-1 \\ -a-1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

これより $ax-(a+1)y=x$ かつ $-(a+1)x+ay=y$ …②

辺々加えて $x+y=0$ より $y=-x$，これと②より $2ax=0$

$a\neq 0$ のときは $x=0,\ y=0$ となり， $f$ の不動点の集合は１点 $(0,\ 0)$ になる。

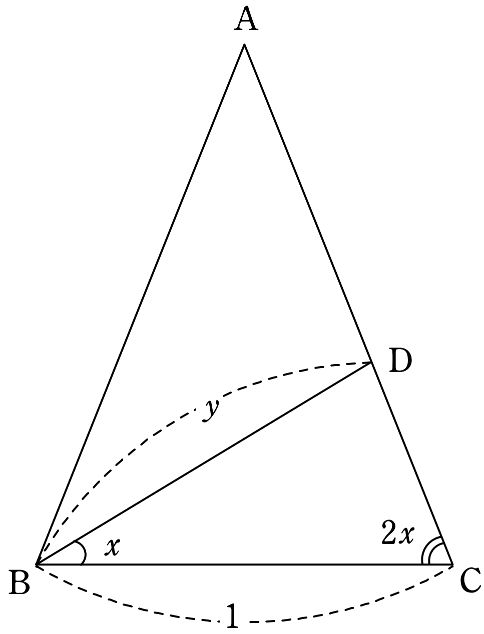
$a=0$ のときは $y=-x$ となり， $f$ の不動点の集合は，直線 $y=-x$ になる。

よって，求める行列 $B$ は

$$B=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

[ 東京工業大学 1980 年 $\boxed{2}$ ]

2 等辺 3 角形 ABC の底辺 BC の長さを 1 とする。底角 ∠B の 2 等分線が対辺 AC と交わる点を D とする。線分 BD の長さのとりうる範囲を求めよ。




$\angle\mathrm{DBC}=2x$，$\mathrm{BD}=y$ とおく。

△DBC において正弦定理より $\dfrac{y}{\sin 2x}=\dfrac{1}{\sin(\pi-3x)}$

よって $y=\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$

また，$0<2x<\dfrac{\pi}{2}$ より $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ である。

さらに，$\sin x>0$ であるから

$$\begin{aligned} y&=\frac{\sin 2x}{\sin 3x}\\ &=\frac{2\sin x\cos x}{3\sin x-4\sin^3 x}=\frac{2\cos x}{3-4\sin^2 x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'&=2\cdot\frac{-\sin x(3-4\sin^2 x)-\cos x(-8\sin x\cos x)}{\left(3-4\sin^2 x\right)^2}\\ &=-2\cdot\frac{\sin x\left(3-4\sin^2 x-8\cos^2 x\right)}{\left(3-4\sin^2 x\right)^2}\\ &=-2\cdot\frac{\sin x\left(-1-4\cos^2 x\right)}{\left(3-4\sin^2 x\right)^2}\\ &=\frac{2\sin x\left(4\cos^2 x+1\right)}{\left(3-4\sin^2 x\right)^2}\end{aligned}$$

よって $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ において $y'>0$ より $y$ は単調増加である。

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x}{3-4\sin^2 x}=\frac{2}{3}$，$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}y=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\cos x}{3-4\sin^2 x}=\sqrt{2}$

したがって $\dfrac{2}{3}<\mathrm{BD}<\sqrt{2}$ となる。

[ **東京工業大学 1980 年 $\boxed{3}$** ]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

曲線 $y=e^x$ に点 $(a,\ b)$ から引きうる接線の個数を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

$y=e^x$ 上の点 $(t,\ e^t)$ における接線の方程式は $y-e^t=e^t(x-t)$ $\Leftrightarrow$ $y-e^t=e^tx-te^t$

これが点 $(a,\ b)$ を通るとき, $b-e^t=ae^t-te^t$ $\Leftrightarrow$ $e^t(a-t+1)-b=0$

ここで, $f(t)=e^t(a-t+1)-b$ とおく。

求める接線の個数は, $t$ の方程式 $f(t)=0$ の実数解の個数に等しい。

$f'(t)=e^t(a-t+1)-e^t-b=e^t(a-t)$ であり,

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{t\to\infty}\left\{e^t(a-t+1)-b\right\}=-\infty$$

$$\lim_{t\to-\infty} f(t)=\lim_{t\to-\infty}\left\{e^t(a-t+1)-b\right\}=-b$$

であるから, $f(t)$ の増減は下表に従う。

| $t$ | $(-\infty)$ | $\cdots$ | $a$ | $\cdots$ | $(+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(t)$ | $(-b)$ | $\nearrow$ | $e^a-b$ | $\searrow$ | $(-\infty)$ |

よって $b\leqq 0$ のとき 1個

$0<b<e^a$ のとき 2 個

$b=e^a$ のとき 1個

$b>e^a$ のとき 0 個

**[ 東京工業大学 1980 年 $\boxed{4}$ ]**

---

$S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin^n x\,dx \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ とする。次のことを証明せよ。

(1) $S_1 < S_2$

(2) $S_{n+2} + S_n > 2S_{n+1}$

(3) $m < n$ のとき，$S_m < S_n$

---

(1) $S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\,dx = \left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)\,dx = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

$$S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 (1 - \cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x\,dx$$

ここで，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cdot \frac{1}{2}\sin 2x\,dx$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x\,dx$$

$$= -\left\{\left[-\frac{1}{2}x\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx\right\}$$

$$= -\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,dx\right\}$$

$$= -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{\pi}{4}$$

よって $S_2 = \frac{\pi^3}{48} - \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{\pi^3 + 6\pi}{48}$ である。

$\pi > 3.1$ であることから

$$\frac{\pi^3+6\pi}{48} > \frac{3.1^3+6\times 3.1}{48} = \frac{29.791+18.6}{48} = \frac{48.391}{48} > 1 = S_1$$

よって $S_2 > S_1$

(2) $S_{n+2}+S_n-2S_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n+2}\sin^{n+2} x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin^n x\,dx - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin^n x\,dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin^n x(x^2\sin^2 x - 2x\sin x + 1)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin^n x(x\sin x - 1)^2\,dx$$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において被積分関数は 0 以上で，恒等的に 0 ではないので

$S_{n+2}+S_n-2S_{n+1} > 0$ すなわち，題意の不等式が成り立つ。

(3) 数学的帰納法により示す。

（ i ）(1)より $S_2 > S_1$ である。

（ii） $S_n > S_{n-1}$ であるとすると，

(2)を $n \to n-1$ としてから変形した $S_{n+1}-S_n > S_n - S_{n-1}$ より $S_{n+1}-S_n > 0$ が成り立つ。

（ i ），（ii）より $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $S_{n+1}-S_n > 0$ が成り立つ。

よって，$m < n$ のとき，$S_m < S_n$ が成り立つ。