[東京工業大学 1980 年 $\boxed{4}$]

$S_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n\sin^n x\,dx \quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ とする。次のことを証明せよ。

(1) $S_1<S_2$

(2) $S_{n+2}+S_n>2S_{n+1}$

(3) $m<n$ のとき， $S_m<S_n$

---

(1) $S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx=\left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)\,dx=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

$$S_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(1-\cos 2x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2x\,dx$$

ここで， $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\,dx$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,dx$$

$$=-\left\{\left[-\frac{1}{2}x\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx\right\}$$

$$=-\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx\right\}$$

$$=-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{\pi}{4}$$

よって $S_2=\frac{\pi^3}{48}-\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$=\frac{\pi^3+6\pi}{48}$ である。

$\pi > 3.1$ であることから

$$\frac{\pi^3+6\pi}{48} > \frac{3.1^3+6\times 3.1}{48} = \frac{29.791+18.6}{48} = \frac{48.391}{48} > 1 = S_1$$

よって $S_2 > S_1$

(2) $S_{n+2}+S_n-2S_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n+2}\sin^{n+2}x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin^n x\,dx - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin^n x\,dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin^n x(x^2\sin^2 x - 2x\sin x + 1)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin^n x(x\sin x - 1)^2\,dx$$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において被積分関数は 0 以上で，恒等的に 0 ではないので

$S_{n+2}+S_n-2S_{n+1} > 0$ すなわち，題意の不等式が成り立つ。

(3) 数学的帰納法により示す。

(ｉ) (1)より $S_2 > S_1$ である。

(ⅱ) $S_n > S_{n-1}$ であるとすると，

(2)を $n \to n-1$ としてから変形した $S_{n+1}-S_n > S_n - S_{n-1}$ より $S_{n+1}-S_n > 0$ が成り立つ。

(ｉ)，(ⅱ)より $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $S_{n+1}-S_n > 0$ が成り立つ。

よって，$m < n$ のとき，$S_m < S_n$ が成り立つ。