[東京工業大学 1980 年 $\boxed{3}$]

曲線 $y=e^x$ に点 $(a,\ b)$ から引きうる接線の個数を求めよ。

$y=e^x$ 上の点 $(t,\ e^t)$ における接線の方程式は $y-e^t=e^t(x-t)$ $\Leftrightarrow$ $y-e^t=e^tx-te^t$

これが点 $(a,\ b)$ を通るとき, $b-e^t=ae^t-te^t$ $\Leftrightarrow$ $e^t(a-t+1)-b=0$

ここで, $f(t)=e^t(a-t+1)-b$ とおく。

求める接線の個数は, t の方程式 $f(t)=0$ の実数解の個数に等しい。

$f'(t)=e^t(a-t+1)-e^t-b=e^t(a-t)$ であり,

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{t\to\infty}\left\{e^t(a-t+1)-b\right\}=-\infty$$

$$\lim_{t\to-\infty} f(t)=\lim_{t\to-\infty}\left\{e^t(a-t+1)-b\right\}=-b$$

であるから, $f(t)$ の増減は下表に従う。

t	$(-\infty)$	$\cdots$	a	$\cdots$	$(+\infty)$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$(-b)$	$\nearrow$	e^a-b	$\searrow$	$(-\infty)$

よって $b\leqq 0$ のとき 1個

$0<b<e^a$ のとき 2 個

$b=e^a$ のとき 1個

$b>e^a$ のとき 0 個