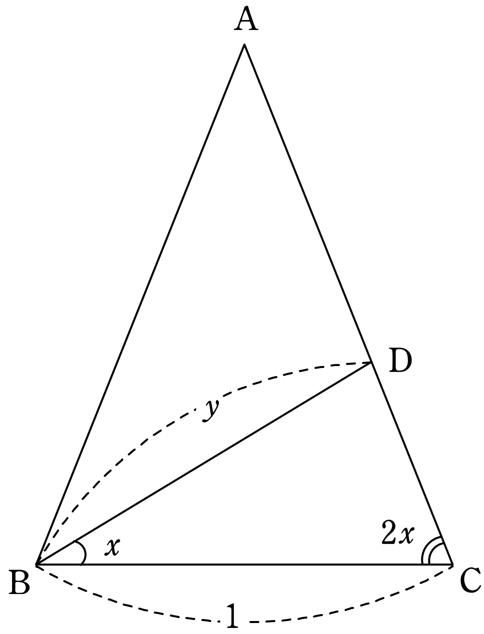
[東京工業大学 1980 年 $\boxed{2}$]

2 等辺 3 角形 ABC の底辺 BC の長さを 1 とする。底角 ∠B の 2 等分線が対辺 AC と交わる点を D とする。線分 BD の長さのとりうる範囲を求めよ。



$\angle\mathrm{DBC}=2x$， $\mathrm{BD}=y$ とおく。

△DBC において正弦定理より $\dfrac{y}{\sin 2x}=\dfrac{1}{\sin(\pi-3x)}$

よって $y=\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$

また，$0<2x<\dfrac{\pi}{2}$ より $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ である。

さらに，$\sin x>0$ であるから

$$y=\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$$

$$=\frac{2\sin x\cos x}{3\sin x-4\sin^3 x}=\frac{2\cos x}{3-4\sin^2 x}$$

$$y'=2\cdot\frac{-\sin x(3-4\sin^2 x)-\cos x(-8\sin x\cos x)}{\left(3-4\sin^2 x\right)^2}$$

$$=-2\cdot\frac{\sin x\left(3-4\sin^2 x-8\cos^2 x\right)}{\left(3-4\sin^2 x\right)^2}$$

$$=-2\cdot\frac{\sin x\left(-1-4\cos^2 x\right)}{\left(3-4\sin^2 x\right)^2}$$

$$=\frac{2\sin x\left(4\cos^2 x+1\right)}{\left(3-4\sin^2 x\right)^2}$$

よって $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ において $y'>0$ より y は単調増加である。

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x}{3-4\sin^2 x}=\frac{2}{3}$， $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}y=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\cos x}{3-4\sin^2 x}=\sqrt{2}$

したがって $\dfrac{2}{3}<\mathrm{BD}<\sqrt{2}$ となる。