[東京工業大学 1980 年 $\boxed{1}$]

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$とし，$B$を$AB=BA$ を満たす 2 行 2 列の行列とする。Bで定まる 1 次変換 f で平面上の点$\mathrm{P}(1, 1)$がPと異なる点$\mathrm{Q}(t, t^3)$にうつされるとする。次の問に答えよ。

(1) tを求めよ。

(2) f によって動かない平面上の点の集合が直線のとき，Bを求めよ。

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと $AB=BA$ より

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a-2c & 3b-2d \\ -2a+3c & -2b+3d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3a-2b & -2a+3b \\ 3c-2d & -2c+3d \end{pmatrix}$$

成分を比較して $\begin{cases} 3a-2c=3a-2b \\ 3b-2d=-2a+3b \\ -2a+3c=3c-2d \\ -2b+3d=-2c+3d \end{cases}$

これより $b=c,\ a=d$ を得る。

よって $B=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ とおくと $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix}$ より $a+b=t$ かつ $b+a=t^3$

$t=t^3$ より $t(t+1)(t-1)=0$ よって $t=0, \pm 1$

P, Qは異なる点なので，$t=0, -1$ である。

(2)（ｉ）$t=0$のとき

$a+b=0$ であるから $b=-a$

Bで定まる 1 次変換 f の不動点を(x, y)とすると

$$\begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

これより $ax-ay=x$ かつ $-ax+ay=y$ …①

辺々加えて $x+y=0$ より $y=-x$，これと①より $(2a-1)x=0$

$a\neq\dfrac{1}{2}$ のときは $x=0,\ y=0$ となり，f の不動点の集合は 1 点$(0, 0)$になる。

$a=\dfrac{1}{2}$ のときは $y=-x$ となり，f の不動点の集合は，直線 $y=-x$ になる。

（ⅱ）$t=-1$のとき

$a+b=-1$ であるから $b=-a-1$

B で定まる 1 次変換 f の不動点を$(x,\ y)$ とすると

$$\begin{pmatrix} a & -a-1 \\ -a-1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

これより $ax-(a+1)y=x$ かつ $-(a+1)x+ay=y$ …②

辺々加えて $x+y=0$ より $y=-x$，これと②より $2ax=0$

$a\neq 0$ のときは $x=0,\ y=0$ となり，f の不動点の集合は 1 点$(0,\ 0)$になる。

$a=0$ のときは $y=-x$ となり，f の不動点の集合は，直線 $y=-x$ になる。

よって，求める行列Bは

$$B=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$