[東京工業大学 1979 年 $\boxed{1}$]

直線 $\ell: x=y=z$ と直線 $m: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{-1}$ 上にそれぞれ点列 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_n, \cdots$ および $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \cdots, \mathrm{Q}_n, \cdots$ があり，すべての n について線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ と m，線分 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ と ℓ とはそれぞれ直交しているとする。n を限りなく大きくするとき，点 $\mathrm{P}_n, \mathrm{Q}_n$ はそれぞれどのような点に近づくか。それらの点の座標を求めよ。

直線 ℓ, m を媒介変数 s, t を用いて表すと，それぞれ

$\ell: x=y=z=s$

$m: x=2t,\ y=3t+1,\ z=-t$

となる。$\mathrm{P}_n, \mathrm{Q}_n$ も同様に，$\mathrm{P}_n\left(s_n, s_n, s_n\right), \mathrm{Q}_n\left(2t_n, 3t_n+1, -t_n\right)$ と表す。

$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} \perp \ell$ より

$$\left(2t_n-s_n, 3t_n+1-s_n, -t_n-s_n\right)\cdot(2, 3, -1)=2\left(2t_n-s_n\right)+3\left(3t_n+1-s_n\right)-\left(-t_n-s_n\right)$$

$$=-4s_n+14t_n+3=0$$

よって $t_n=\dfrac{2}{7}s_n-\dfrac{3}{14}$ $\cdots$①

また，$\overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}} \perp m$ より

$$\left(s_{n+1}-2t_n, s_{n+1}-3t_n-1, s_{n+1}+t_n\right)\cdot(1, 1, 1)=\left(s_{n+1}-2t_n\right)+\left(s_{n+1}-3t_n-1\right)+\left(s_{n+1}+t_n\right)$$

$$=3s_{n+1}-4t_n-1=0$$

よって $s_{n+1}=\dfrac{4}{3}t_n+\dfrac{1}{3}$ $\cdots$②

①，②より $s_{n+1}=\dfrac{8}{21}s_n+\dfrac{1}{21}$

この漸化式を解くと $s_n=\left(\dfrac{\frac{1}{21}}{1-\frac{8}{21}}\right)+\left\{s_1-\left(\dfrac{\frac{1}{21}}{1-\frac{8}{21}}\right)\right\}\left(\dfrac{8}{21}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{13}+\left(s_1-\dfrac{1}{13}\right)\left(\dfrac{8}{21}\right)^{n-1}$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}s_n=\dfrac{1}{13}$

したがって　$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{7}s_n - \frac{3}{14}\right)$

$$= \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{13} - \frac{3}{14}$$

$$= -\frac{5}{26}$$

以上より　$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}_n\left(s_n,\ s_n,\ s_n\right) = \mathrm{P}\left(\frac{1}{13},\ \frac{1}{13},\ \frac{1}{13}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Q}_n\left(2t_n,\ 3t_n+1,\ -t_n\right) = \mathrm{Q}\left(-\frac{5}{13},\ \frac{11}{26},\ \frac{5}{26}\right)$$

にそれぞれ近づく。

[東京工業大学 1979 年 $\boxed{2}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

x の関数 $\left(1-\dfrac{a}{2}\cos^2 x\right)\sin x$ の最大値が 1 となるような a の範囲を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$$\left(1-\frac{a}{2}\cos^2 x\right)\sin x=\left(1-\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\sin^2 x\right)\sin x=\frac{a}{2}\sin^3 x+\left(1-\frac{a}{2}\right)\sin x$$

であり, $\sin x=t$ とおくと $-1\leqq t\leqq 1$ であり,

$\dfrac{a}{2}\sin^3 x+\left(1-\dfrac{a}{2}\right)\sin x=\dfrac{a}{2}t^3+\left(1-\dfrac{a}{2}\right)t$ となる。

ここで, $f(t)=\dfrac{a}{2}t^3+\left(1-\dfrac{a}{2}\right)t$ とおく。 $f(1)=1$ であることから

$-1\leqq t\leqq 1$ の範囲で $f(t)\leqq 1$ すなわち $\dfrac{a}{2}t^3+\left(1-\dfrac{a}{2}\right)t\leqq 1$ となる a の範囲を求めればよい。

$$\frac{a}{2}t^3+\left(1-\frac{a}{2}\right)t\leqq 1 \iff 2(t-1)\left(at^2+at+2\right)\leqq 0$$

$t-1\leqq 0$ であるから, $at^2+at+2\geqq 0$ …① となればよい。

$g(t)=at^2+at+2$ とおくと $g(t)=a\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}a+2$

(ⅰ) $a=0$ のとき ①は成り立つ。

(ⅱ) $a>0$ のとき

①が成り立つのは $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)\geqq 0$ すなわち $-\dfrac{1}{4}a+2\geqq 0$ より $a\leqq 8$ したがって $0<a\leqq 8$

(ⅲ) $a<0$ のとき

①が成り立つのは $g(1)\geqq 0$ すなわち $a+a+2\geqq 0$ より $a\geqq -1$ したがって $-1\leqq a<0$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ) より $-1\leqq a\leqq 8$

[東京工業大学 1979 年 $\boxed{3}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――☆

⑴ $p(x),\ q(x)$ を x の 3 次以下の多項式とする。

すべての x に対して $p(x)\cos x = q(x)\sin x$ が成り立つならば，$p(x),\ q(x)$ は恒等的に 0 に等しいことを示せ。

⑵ $\mathrm{P}(x),\ \mathrm{Q}(x)$ を x の 3 次以下の多項式とする。すべての x に対して

$$\mathrm{P}(x)\cos x + \int_0^x \mathrm{Q}(t)\sin t\,dt = (x^2+2x+3)\sin x$$

が成り立つとき，$\mathrm{P}(x),\ \mathrm{Q}(x)$ を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――☆

⑴ 異なる 4 つの値 $x = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi$ に対し，$\cos x \neq 0,\ \sin x = 0$ であり，$p(x) = 0$ となる。

よって，$p(x)$ は 3 次以下の多項式なので，恒等的に 0 となる。

同様にして，異なる 4 つの値 $x = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{5}{2}\pi,\ \dfrac{7}{2}\pi$ に対し，$\cos x = 0,\ \sin x \neq 0$ であり，$q(x) = 0$ となる。よって，$q(x)$ は 3 次以下の多項式なので，恒等的に 0 となる。

⑵ $\mathrm{P}(x)\cos x + \int_0^x \mathrm{Q}(t)\sin t\,dt = (x^2+2x+3)\sin x$ …① の両辺を x で微分して

$$\mathrm{P}'(x)\cos x - \mathrm{P}(x)\sin x + \mathrm{Q}(x)\sin x = (2x+2)\sin x + (x^2+2x+3)\cos x$$

$$\left\{\mathrm{P}'(x) - (x^2+2x+3)\right\}\cos x = \left\{\mathrm{P}(x) - \mathrm{Q}(x) + (2x+2)\right\}\sin x$$

ここで，$\mathrm{P}'(x) - (x^2+2x+3),\ \mathrm{P}(x) - \mathrm{Q}(x) + (2x+2)$ はともに 3 次以下の多項式であるから，

⑴の結果より $\mathrm{P}'(x) - (x^2+2x+3) = 0$ かつ $\mathrm{P}(x) - \mathrm{Q}(x) + (2x+2) = 0$

よって $\mathrm{P}'(x) = x^2+2x+3$ より $\mathrm{P}(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x + C$ （C は積分定数）

①より $\mathrm{P}(0) = 0$ なので $C = 0$ となる。

よって $\mathrm{P}(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x$，$\mathrm{Q}(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 5x + 2$ となる。

[東京工業大学 1979 年 $\boxed{4}$]

☆────────────────────☆

曲線$C: y=\log x$上の 2 点$\mathrm{P}(a, b)$, $\mathrm{Q}(c, d)$ $(1<a<c)$における曲線Cの 2 つの接線の交点を R とし，点$(a, 0)$を P′，点$(c, 0)$を Q′ とする。曲線Cと直線$x=a$, $x=c$およびx軸とで囲まれる図形の面積Sと△P′Q′R の面積Tとの比を求めよ。

☆────────────────────☆

$S=\int_a^c \log x\,dx=\left[x\log x-x\right]_a^c=c\log c-c-a\log a+a=cd-c-ab+a$ …① である。

また，$y'=\dfrac{1}{x}$ より

P での接線の方程式は $y-b=\dfrac{1}{a}(x-a)$

Q での接線の方程式は $y-d=\dfrac{1}{c}(x-c)$

連立してRのx, y座標を求めると

$$\frac{1}{a}(x-a)+b=\frac{1}{c}(x-c)+d$$

$$c(x-a)+abc=a(x-c)+acd$$

$$(c-a)x=ac(d-b)$$

$$x=\frac{ac(d-b)}{c-a}+b$$

$$y=\frac{1}{a}\left\{\frac{ac(d-b)}{c-a}-a\right\}=\frac{c(d-b)}{c-a}-1+b$$

よって $T=\dfrac{1}{2}\cdot(c-a)\cdot\left\{\dfrac{c(d-b)}{c-a}-1+b\right\}$

$$=\frac{1}{2}\left\{c(d-b)+(-1+b)(c-a)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(cd-bc-c+a+bc-ab\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(cd-c-ab+a\right) \quad \cdots②$$

①，②より $S:T=2:1$