[東京工業大学 1979 年 $\boxed{4}$]

曲線$C : y=\log x$ 上の 2 点 P$(a,\ b)$, Q$(c,\ d)$ $(1<a<c)$ における曲線C の 2 つの接線の交点を R とし，点$(a,\ 0)$ を P′，点$(c,\ 0)$ を Q′ とする。曲線C と直線$x=a,\ x=c$ および x 軸とで囲まれる図形の面積S と△P′Q′R の面積T との比を求めよ。

$S=\int_a^c \log x\,dx=\left[x\log x-x\right]_a^c=c\log c-c-a\log a+a=cd-c-ab+a$ $\cdots$① である。

また，$y'=\dfrac{1}{x}$ より

P での接線の方程式は $y-b=\dfrac{1}{a}(x-a)$

Q での接線の方程式は $y-d=\dfrac{1}{c}(x-c)$

連立して R の $x,\ y$ 座標を求めると

$$\frac{1}{a}(x-a)+b=\frac{1}{c}(x-c)+d$$

$$c(x-a)+abc=a(x-c)+acd$$

$$(c-a)x=ac(d-b)$$

$$x=\frac{ac(d-b)}{c-a}+b$$

$$y=\frac{1}{a}\left\{\frac{ac(d-b)}{c-a}-a\right\}=\frac{c(d-b)}{c-a}-1+b$$

よって $T=\dfrac{1}{2}\cdot(c-a)\cdot\left\{\dfrac{c(d-b)}{c-a}-1+b\right\}$

$$=\frac{1}{2}\left\{c(d-b)+(-1+b)(c-a)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(cd-bc-c+a+bc-ab\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(cd-c-ab+a\right)\quad\cdots②$$

①，②より $S:T=2:1$