[東京工業大学 1979 年 $\boxed{3}$]

(1) $p(x),\ q(x)$ を x の 3 次以下の多項式とする。

すべての x に対して $p(x)\cos x = q(x)\sin x$ が成り立つならば，$p(x),\ q(x)$ は恒等的に 0 に等しいことを示せ。

(2) $\mathrm{P}(x),\ \mathrm{Q}(x)$ を x の 3 次以下の多項式とする。すべての x に対して

$$\mathrm{P}(x)\cos x + \int_0^x \mathrm{Q}(t)\sin t\,dt = (x^2+2x+3)\sin x$$

が成り立つとき，$\mathrm{P}(x),\ \mathrm{Q}(x)$ を求めよ。

---

(1) 異なる 4 つの値 $x = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi$ に対し，$\cos x \neq 0,\ \sin x = 0$ であり，$p(x) = 0$ となる。

よって，$p(x)$ は 3 次以下の多項式なので，恒等的に 0 となる。

同様にして，異なる 4 つの値 $x = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{5}{2}\pi,\ \dfrac{7}{2}\pi$ に対し，$\cos x = 0,\ \sin x \neq 0$ であり，$q(x) = 0$ となる。よって，$q(x)$ は 3 次以下の多項式なので，恒等的に 0 となる。

(2) $\mathrm{P}(x)\cos x + \int_0^x \mathrm{Q}(t)\sin t\,dt = (x^2+2x+3)\sin x$ …① の両辺を x で微分して

$$\mathrm{P}'(x)\cos x - \mathrm{P}(x)\sin x + \mathrm{Q}(x)\sin x = (2x+2)\sin x + (x^2+2x+3)\cos x$$

$$\left\{\mathrm{P}'(x) - (x^2+2x+3)\right\}\cos x = \left\{\mathrm{P}(x) - \mathrm{Q}(x) + (2x+2)\right\}\sin x$$

ここで，$\mathrm{P}'(x) - (x^2+2x+3),\ \mathrm{P}(x) - \mathrm{Q}(x) + (2x+2)$ はともに 3 次以下の多項式であるから，

(1)の結果より $\mathrm{P}'(x) - (x^2+2x+3) = 0$ かつ $\mathrm{P}(x) - \mathrm{Q}(x) + (2x+2) = 0$

よって $\mathrm{P}'(x) = x^2+2x+3$ より $\mathrm{P}(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x + C$ （C は積分定数）

①より $\mathrm{P}(0) = 0$ なので $C = 0$ となる。

よって $\mathrm{P}(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x$，$\mathrm{Q}(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 5x + 2$ となる。