[**東京工業大学 1979 年 $\boxed{2}$**]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

x の関数 $\left(1-\dfrac{a}{2}\cos^2 x\right)\sin x$ の最大値が 1 となるような a の範囲を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

$$\left(1-\frac{a}{2}\cos^2 x\right)\sin x=\left(1-\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\sin^2 x\right)\sin x=\frac{a}{2}\sin^3 x+\left(1-\frac{a}{2}\right)\sin x$$

であり， $\sin x=t$ とおくと $-1\leqq t\leqq 1$ であり，

$\dfrac{a}{2}\sin^3 x+\left(1-\dfrac{a}{2}\right)\sin x=\dfrac{a}{2}t^3+\left(1-\dfrac{a}{2}\right)t$ となる。

ここで， $f(t)=\dfrac{a}{2}t^3+\left(1-\dfrac{a}{2}\right)t$ とおく。 $f(1)=1$ であることから

$-1\leqq t\leqq 1$ の範囲で $f(t)\leqq 1$ すなわち $\dfrac{a}{2}t^3+\left(1-\dfrac{a}{2}\right)t\leqq 1$ となる a の範囲を求めればよい。

$$\frac{a}{2}t^3+\left(1-\frac{a}{2}\right)t\leqq 1 \iff 2(t-1)\left(at^2+at+2\right)\leqq 0$$

$t-1\leqq 0$ であるから， $at^2+at+2\geqq 0$ …① となればよい。

$g(t)=at^2+at+2$ とおくと $g(t)=a\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}a+2$

（ｉ） $a=0$ のとき　①は成り立つ。

（ⅱ） $a>0$ のとき

①が成り立つのは $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)\geqq 0$ すなわち $-\dfrac{1}{4}a+2\geqq 0$ より $a\leqq 8$ 　したがって $0<a\leqq 8$

（ⅲ） $a<0$ のとき

①が成り立つのは $g(1)\geqq 0$ すなわち $a+a+2\geqq 0$ より $a\geqq -1$ 　したがって $-1\leqq a<0$

（ｉ），（ⅱ），（ⅲ）より $-1\leqq a\leqq 8$