[東京工業大学 1979 年 $\boxed{1}$]

☆ ☆

直線 $\ell: x=y=z$ と直線 $m: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{-1}$ 上にそれぞれ点列 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_n, \cdots$ および $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \cdots, \mathrm{Q}_n, \cdots$ があり，すべての n について線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ と m，線分 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ と ℓ とはそれぞれ直交しているとする。n を限りなく大きくするとき，点 $\mathrm{P}_n, \mathrm{Q}_n$ はそれぞれどのような点に近づくか。それらの点の座標を求めよ。

☆ ☆

直線 ℓ, m を媒介変数 s, t を用いて表すと，それぞれ

$\ell: x=y=z=s$

$m: x=2t,\ y=3t+1,\ z=-t$

となる。$\mathrm{P}_n, \mathrm{Q}_n$ も同様に，$\mathrm{P}_n(s_n, s_n, s_n), \mathrm{Q}_n(2t_n, 3t_n+1, -t_n)$ と表す。

$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} \perp \ell$ より

$$\begin{aligned}(2t_n-s_n, 3t_n+1-s_n, -t_n-s_n)\cdot(2, 3, -1) &= 2(2t_n-s_n)+3(3t_n+1-s_n)-(-t_n-s_n)\\ &= -4s_n+14t_n+3=0\end{aligned}$$

よって $t_n=\dfrac{2}{7}s_n-\dfrac{3}{14}$ …①

また，$\overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}} \perp m$ より

$$\begin{aligned}(s_{n+1}-2t_n, s_{n+1}-3t_n-1, s_{n+1}+t_n)\cdot(1, 1, 1) &= (s_{n+1}-2t_n)+(s_{n+1}-3t_n-1)+(s_{n+1}+t_n)\\ &= 3s_{n+1}-4t_n-1=0\end{aligned}$$

よって $s_{n+1}=\dfrac{4}{3}t_n+\dfrac{1}{3}$ …②

①，②より $s_{n+1}=\dfrac{8}{21}s_n+\dfrac{1}{21}$

この漸化式を解くと $s_n=\left(\dfrac{\frac{1}{21}}{1-\frac{8}{21}}\right)+\left\{s_1-\left(\dfrac{\frac{1}{21}}{1-\frac{8}{21}}\right)\right\}\left(\dfrac{8}{21}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{13}+\left(s_1-\dfrac{1}{13}\right)\left(\dfrac{8}{21}\right)^{n-1}$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{13}$

したがって $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{7}s_n - \frac{3}{14}\right)$

$$= \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{13} - \frac{3}{14}$$

$$= -\frac{5}{26}$$

以上より $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}_n\left(s_n,\ s_n,\ s_n\right) = \mathrm{P}\left(\frac{1}{13},\ \frac{1}{13},\ \frac{1}{13}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Q}_n\left(2t_n,\ 3t_n+1,\ -t_n\right) = \mathrm{Q}\left(-\frac{5}{13},\ \frac{11}{26},\ \frac{5}{26}\right)$$

にそれぞれ近づく。