[東京工業大学 1978 年 $\boxed{1}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

定数 $a,\ b,\ c,\ p,\ q,\ D$ に対して，次の等式

$$(x^3+ax^2+bx+c)^2=(x^2-1)(x^2+px+q)^2+D$$

がすべての x について成り立つとき，D の値を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$(x^3+ax^2+bx+c)^2$

$=x^6+2ax^5+(a^2+2b)x^4+(2ab+2c)x^3+(2ac+b^2)x^2+2bcx+c^2$

$(x^2-1)(x^2+px+q)^2+D$

$=x^6+2px^5+(p^2+2q-1)x^4+(2pq-2p)x^3+(q^2-2q-p^2)x^2-2pqx-q^2+D$

これらがすべての x について等しくなることから，係数を比較して

$$\begin{cases} 2a=2p & \cdots①\\ a^2+2b=p^2+2q-1 & \cdots②\\ 2ab+2c=2pq-2p & \cdots③\\ 2ac+b^2=q^2-2q-p^2 & \cdots④\\ 2bc=-2pq & \cdots⑤\\ c^2=-q^2+D & \cdots⑥ \end{cases}$$

①，②より　$a=p,\ b=q-\dfrac{1}{2}$　$\cdots$⑦

⑦を③に代入して　$c=-\dfrac{1}{2}p$　$\cdots$⑧

④，⑦，⑧より　$q=-\dfrac{1}{4},\ b=-\dfrac{3}{4}$　$\cdots$⑨

⑤，⑧，⑨より　$p=c=0$　$\cdots$⑩

⑥，⑨，⑩より　$D=\dfrac{1}{16}$

[東京工業大学 1978 年 $\boxed{2}$]

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

a, b, c は $1<a<b<c$ を満たす整数とし，$(ab-1)(bc-1)(ca-1)$ は abc で割り切れるとする。

このとき次の問に答えよ。

(1) $ab+bc+ca-1$ は abc で割り切れることを示せ。

(2) a, b, c をすべて求めよ。

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) $(ab-1)(bc-1)(ca-1)=\left(ab^2c-ab-bc+1\right)(ca-1)$

$$=a^2b^2c^2-ab^2c-a^2bc+ab-abc^2+bc+ca-1$$

$$=abc(abc-a-b-c)+ab+bc+ca-1$$

であり，$(ab-1)(bc-1)(ca-1)$ は abc で割り切れることから

$ab+bc+ca-1$ は abc で割り切れる。

(2) $\dfrac{ab+bc+ca-1}{abc}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{abc}$ であり，これが正の整数になることから

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>1$ である。

このとき，$1<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}<\dfrac{3}{a}$ より $a<3$ なので $a=2$

さらにこのとき，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>\dfrac{1}{2}$ であるから $\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}<\dfrac{2}{b}$ より $b<4$ なので $b=3$

したがって，$\dfrac{1}{c}>\dfrac{1}{6}$ より $c<6$ となるから $c=4, 5$

(ⅰ) $a=2, b=3, c=4$ のとき

$(ab-1)(bc-1)(ca-1)=5\cdot 11\cdot 7$ は $abc=2\cdot 3\cdot 4$ では割り切れないので不適。

(ⅱ) $a=2, b=3, c=5$ のとき

$(ab-1)(bc-1)(ca-1)=5\cdot 14\cdot 9$ は $abc=2\cdot 3\cdot 5$ では割り切れる。

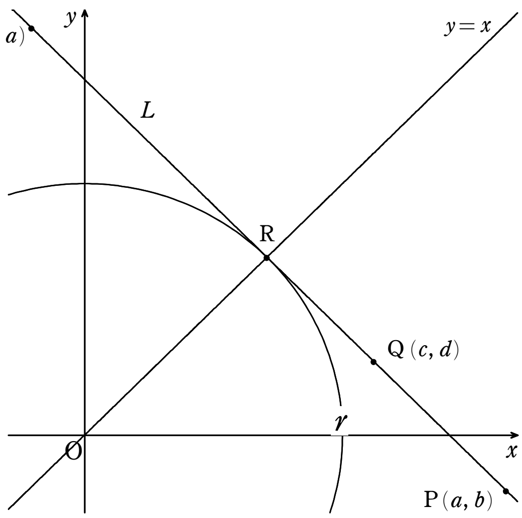
よって $a=2, b=3, c=5$

[東京工業大学 1978 年 $\boxed{3}$]

平面上の原点を中心とする半径 r の円に $\left(\dfrac{r}{\sqrt{2}},\ \dfrac{r}{\sqrt{2}}\right)$ で接する直線を L とし，L 上に接点と異なる 1 点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ をとる。

(1) L 上の任意の点 $\mathrm{Q}(c,\ d)$ は適当な実数 t をとることにより $c=ta+(1-t)b,\ d=(1-t)a+tb$ と表されることを示せ。

(2) L 上の点 Q が接点と P を結ぶ線分上にあるときの t の範囲を求めよ。



(1) 直線 $y=x$ に関して $\mathrm{P}(a,\ b)$ と対称な点を P' とすると $\mathrm{P}'(b,\ a)$ である。

対称性より PP' は直線 $y=x$ に垂直である。

また，接線 L は直線 $y=x$ に垂直かつ点 P を通るので，

PP' は L と一致する。

L 上の任意の点 $\mathrm{Q}(c,\ d)$ に対し，3 点 $\mathrm{P},\ \mathrm{P}',\ \mathrm{Q}$ は

同一直線上にあるから $\overrightarrow{\mathrm{P'Q}}=t\overrightarrow{\mathrm{P'P}}$ （t は実数）と

表すことができ，これから $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP'}}+t\overrightarrow{\mathrm{P'P}}$ が成り立つ。

成分で表すと $(c,\ d)=(b,\ a)+t(a-b,\ b-a)$

$$=(ta+(1-t)b,\ (1-t)a+tb)$$ より題意は示された。

(2) 接点を R とする。

$\overrightarrow{\mathrm{P'Q}}=t\overrightarrow{\mathrm{P'P}}$ において $\mathrm{Q}=\mathrm{R}$ のとき $t=\dfrac{1}{2}$ であり，

$\mathrm{Q}=\mathrm{P}$ のとき $t=1$ である。

よって，点 Q が線分 RP 上にあるときの t の範囲は $\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 1$

[東京工業大学 1978 年 $\boxed{4}$]

数列 $a_1,\ a_2,\ \cdots.\ a_n,\ \cdots$ の隣り合った 2 項 $a_n,\ a_{n+1}$ は 2 次方程式 $x^2+3nx+C_n=0$ の 2 つの解である $(n=1,\ 2,\ \cdots)$。$a_1=1$ のとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{2p}C_n$ を求めよ。

解と係数の関係より　$a_n+a_{n+1}=-3n$　$\cdots$①，　$a_n\,a_{n+1}=C_n$

①より　$\left(a_{n+1}+a_{n+2}\right)-\left(a_n+a_{n+1}\right)=-3(n+1)-(-3n)\ \Leftrightarrow\ a_{n+2}-a_n=-3$　$\cdots$②

$a_1=1$　より　$m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$　に対して

$$a_{2m-1}=1+(m-1)\cdot(-3)=-3m+4$$

$a_2=-4$　より同様に

$$a_{2m}=-4+(m-1)\cdot(-3)=-3m-1$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{2p}C_n=\sum_{m=1}^{p}C_{2m-1}+\sum_{m=1}^{p}C_{2m}$　であり，右辺の Σ についてそれぞれ

$$\sum_{m=1}^{p}C_{2m-1}=\sum_{m=1}^{p}a_{2m-1}a_{2m}=\sum_{m=1}^{p}(-3m+4)(-3m-1)=\sum_{m=1}^{p}(9m^2-9m-4)$$

$$=9\cdot\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}-9\cdot\frac{p(p+1)}{2}-4p$$

$$\sum_{m=1}^{p}C_{2m}=\sum_{m=1}^{p}a_{2m}a_{2m+1}=\sum_{m=1}^{p}(-3m-1)(-3m+1)=\sum_{m=1}^{p}(9m^2-1)$$

$$=9\cdot\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}-p$$

となるので，

$$\sum_{n=1}^{2p}C_n=\left\{9\cdot\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}-9\cdot\frac{p(p+1)}{2}-4p\right\}+\left\{9\cdot\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}-p\right\}$$

$$=3p(p+1)(2p+1)-9\cdot\frac{p(p+1)}{2}-5p$$

$$=\frac{p}{2}\left(12p^2+18p+6-9p-9-10\right)$$

$$=\frac{p}{2}\left(12p^2+9p-13\right)$$

となる。

[東京工業大学 1978 年 $\boxed{5}$]

2 つの関数 $f(x)=x^4-x,\ g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が $f(1)=g(1),\ f(-1)=g(-1)$ を満たすとき，

積分 $\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}^2\,dx$ を最小にする $a,\ b,\ c,\ d$ を求めよ。

$f(1)=g(1),\ f(-1)=g(-1)$ より $0=a+b+c+d$ ， $2=-a+b-c+d$

よって $a+c=-1,\ b+d=1$ …①

ここで， $f(x)-g(x)=\left(x^4-x\right)-\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)$

$$=x^4-ax^3-bx^2-(c+1)x-d$$

$$=x^4-ax^3-bx^2+ax+b-1$$

である。

また，$\left\{f(x)-g(x)\right\}^2=\left(x^4-ax^3-bx^2+ax+b-1\right)^2$

$$\begin{aligned}&=x^8-ax^7-bx^6+ax^5+(b-1)x^4\\&\quad -ax^7+a^2x^6+abx^5-a^2x^4-a(b-1)x^3\\&\quad -bx^6+abx^5+b^2x^4-abx^3-b(b-1)x^2\\&\quad +ax^5-a^2x^4-abx^3+a^2x^2+a(b-1)x\\&\quad +(b-1)x^4-a(b-1)x^3-b(b-1)x^2+a(b-1)x+(b-1)^2\\&=x^8-2ax^7+(a^2-2b)x^6+(2a+2ab)x^5+(-2a^2+b^2+2b-2)x^4\\&\quad +(2a-4ab)x^3+(a^2-2b^2+2b)x^2+(2ab-2a)x+(b-1)^2\end{aligned}$$

題意の積分について，奇数次の項は奇関数なので，積分すると 0 になるから

$\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}^2\,dx$

$=2\int_{0}^{1}\{x^8+(a^2-2b)x^6+(-2a^2+b^2+2b-2)x^4+(a^2-2b^2+2b)x^2+(b-1)^2\}\,dx$

$$=2\left\{\frac{1}{9}+\frac{a^2-2b}{7}+\frac{-2a^2+b^2+2b-2}{5}+\frac{a^2-2b^2+2b}{3}+(b-1)^2\right\}$$

$$\left\{\quad\right\}=\frac{1}{9}+\frac{a^2-2b}{7}+\frac{-2a^2+b^2+2b-2}{5}+\frac{a^2-2b^2+2b}{3}+(b-1)^2$$

$$=\frac{8}{105}a^2+\frac{8}{15}b^2-\frac{128}{105}b+\frac{32}{45}$$

$$=\frac{8}{105}a^2+\frac{8}{15}\left(b-\frac{8}{7}\right)^2-\frac{8}{15}\left(\frac{8}{7}\right)^2+\frac{32}{45}$$

これが最小となるのは $a=0,\ b=\frac{8}{7}$ のときで，①より $c=-1,\ d=-\frac{1}{7}$ となる。

よって，積分 $\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}^2\,dx$ を最小にする $a,\ b,\ c,\ d$ は $a=0,\ b=\frac{8}{7},\ c=-1,\ d=-\frac{1}{7}$

[東京工業大学 1978 年 $\boxed{6}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

積分 $I(a)=\int_{-1}^{1}|x-a|e^x\,dx$ の $|a|\leqq 1$ における最大値を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

$|x-a|e^x=\begin{cases}-(x-a)e^x & (-1\leqq x\leqq a)\\ (x-a)e^x & (a\leqq x\leqq 1)\end{cases}$ であるから

$$I(a)=-\int_{-1}^{a}(x-a)e^x\,dx+\int_{a}^{1}(x-a)e^x\,dx$$

$$=-\left\{\Big[(x-a)e^x\Big]_{-1}^{a}-\int_{-1}^{a}e^x\,dx\right\}+\left\{\Big[(x-a)e^x\Big]_{a}^{1}-\int_{a}^{1}e^x\,dx\right\}$$

$$=-\left\{(a+1)e^{-1}-(e^a-e^{-1})\right\}+\left\{(1-a)e-(e-e^a)\right\}$$

$$=2e^a-(e+e^{-1})a-2e^{-1}$$

となる。

よって $I'(a)=2e^a-(e+e^{-1})$

$I'(-1)=e^{-1}-e<0$，$I'(1)=e-e^{-1}>0$ であり，e^a は単調増加なので $I'(a)$ も単調増加である。

したがって

$I'(t)=0$ となる t（$-1<t<1$） がただ１つ存在し，$I'(a)$ は $a=t$ で負から正に符号変化する。

よって $-1\leqq a<t$ で単調に減少し，$t<a\leqq 1$ で単調に増加する。

よって $I(a)$ は $a=1,\ -1$ のいずれかで最大となる。

$I(1)=e-3e^{-1}$，$I(-1)=e+e^{-1}$ より $I(-1)>I(1)$ であるから求める最大値は $e+e^{-1}$