[東京工業大学 1978 年 $\boxed{6}$]

積分 $I(a)=\int_{-1}^{1}|x-a|e^x\,dx$ の $|a|\leqq 1$ における最大値を求めよ。

$|x-a|e^x=\begin{cases}-(x-a)e^x & (-1\leqq x\leqq a)\\ (x-a)e^x & (a\leqq x\leqq 1)\end{cases}$ であるから

$$I(a)=-\int_{-1}^{a}(x-a)e^x\,dx+\int_{a}^{1}(x-a)e^x\,dx$$

$$=-\left\{\Big[(x-a)e^x\Big]_{-1}^{a}-\int_{-1}^{a}e^x\,dx\right\}+\left\{\Big[(x-a)e^x\Big]_{a}^{1}-\int_{a}^{1}e^x\,dx\right\}$$

$$=-\left\{(a+1)e^{-1}-(e^a-e^{-1})\right\}+\left\{(1-a)e-(e-e^a)\right\}$$

$$=2e^a-(e+e^{-1})a-2e^{-1}$$

となる。

よって $I'(a)=2e^a-(e+e^{-1})$

$I'(-1)=e^{-1}-e<0$，$I'(1)=e-e^{-1}>0$ であり，e^a は単調増加なので $I'(a)$ も単調増加である。

したがって

$I'(t)=0$ となる t（$-1<t<1$） がただ１つ存在し，$I'(a)$ は $a=t$ で負から正に符号変化する。

よって $-1\leqq a<t$ で単調に減少し，$t<a\leqq 1$ で単調に増加する。

よって $I(a)$ は $a=1,\,-1$ のいずれかで最大となる。

$I(1)=e-3e^{-1}$，$I(-1)=e+e^{-1}$ より $I(-1)>I(1)$ であるから求める最大値は $e+e^{-1}$