[東京工業大学 1978 年 $\boxed{5}$]

☆――――――――――――――――――――――――――――――☆

2 つの関数 $f(x)=x^4-x,\ g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が $f(1)=g(1),\ f(-1)=g(-1)$ を満たすとき，

積分 $\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}^2\,dx$ を最小にする $a,\ b,\ c,\ d$ を求めよ。

☆――――――――――――――――――――――――――――――☆

$f(1)=g(1),\ f(-1)=g(-1)$ より $0=a+b+c+d$ ， $2=-a+b-c+d$

よって $a+c=-1,\ b+d=1$ …①

ここで， $f(x)-g(x)=\left(x^4-x\right)-\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)$

$$=x^4-ax^3-bx^2-(c+1)x-d$$

$$=x^4-ax^3-bx^2+ax+b-1$$

である。

また， $\left\{f(x)-g(x)\right\}^2=\left(x^4-ax^3-bx^2+ax+b-1\right)^2$

$$\begin{aligned}
&=x^8-ax^7-bx^6+ax^5+(b-1)x^4\\
&\quad -ax^7+a^2x^6+abx^5-a^2x^4-a(b-1)x^3\\
&\quad -bx^6+abx^5+b^2x^4-abx^3-b(b-1)x^2\\
&\quad +ax^5-a^2x^4-abx^3+a^2x^2+a(b-1)x\\
&\quad +(b-1)x^4-a(b-1)x^3-b(b-1)x^2+a(b-1)x+(b-1)^2\\
&=x^8-2ax^7+(a^2-2b)x^6+(2a+2ab)x^5+(-2a^2+b^2+2b-2)x^4\\
&\quad +(2a-4ab)x^3+(a^2-2b^2+2b)x^2+(2ab-2a)x+(b-1)^2
\end{aligned}$$

題意の積分について，奇数次の項は奇関数なので，積分すると 0 になるから

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}^2\,dx$$

$$=2\int_{0}^{1}\{x^8+(a^2-2b)x^6+(-2a^2+b^2+2b-2)x^4+(a^2-2b^2+2b)x^2+(b-1)^2\}\,dx$$

$$=2\left\{\frac{1}{9}+\frac{a^2-2b}{7}+\frac{-2a^2+b^2+2b-2}{5}+\frac{a^2-2b^2+2b}{3}+(b-1)^2\right\}$$

$$\{\quad\}=\frac{1}{9}+\frac{a^2-2b}{7}+\frac{-2a^2+b^2+2b-2}{5}+\frac{a^2-2b^2+2b}{3}+(b-1)^2$$

$$=\frac{8}{105}a^2+\frac{8}{15}b^2-\frac{128}{105}b+\frac{32}{45}$$

$$=\frac{8}{105}a^2+\frac{8}{15}\left(b-\frac{8}{7}\right)^2-\frac{8}{15}\left(\frac{8}{7}\right)^2+\frac{32}{45}$$

これが最小となるのは $a=0,\ b=\frac{8}{7}$ のときで，①より $c=-1,\ d=-\frac{1}{7}$ となる。

よって，積分 $\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}^2\,dx$ を最小にする $a,\ b,\ c,\ d$ は $a=0,\ b=\frac{8}{7},\ c=-1,\ d=-\frac{1}{7}$