[東京工業大学 1978 年 $\boxed{4}$]

☆———☆

数列 $a_1,\ a_2,\ \cdots.\ a_n,\ \cdots$ の隣り合った 2 項 $a_n,\ a_{n+1}$ は 2 次方程式 $x^2+3nx+C_n=0$ の 2 つの解である $(n=1,\ 2,\ \cdots)$。$a_1=1$ のとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{2p}C_n$ を求めよ。

☆———☆

解と係数の関係より　$a_n+a_{n+1}=-3n$　$\cdots$①，　$a_n\,a_{n+1}=C_n$

①より　$\left(a_{n+1}+a_{n+2}\right)-\left(a_n+a_{n+1}\right)=-3(n+1)-(-3n)\ \Leftrightarrow\ a_{n+2}-a_n=-3$　$\cdots$②

$a_1=1$　より　$m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$　に対して

$$a_{2m-1}=1+(m-1)\cdot(-3)=-3m+4$$

$a_2=-4$　より同様に

$$a_{2m}=-4+(m-1)\cdot(-3)=-3m-1$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{2p}C_n=\sum_{m=1}^{p}C_{2m-1}+\sum_{m=1}^{p}C_{2m}$　であり，右辺の Σ についてそれぞれ

$$\sum_{m=1}^{p}C_{2m-1}=\sum_{m=1}^{p}a_{2m-1}a_{2m}=\sum_{m=1}^{p}(-3m+4)(-3m-1)=\sum_{m=1}^{p}(9m^2-9m-4)$$

$$=9\cdot\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}-9\cdot\frac{p(p+1)}{2}-4p$$

$$\sum_{m=1}^{p}C_{2m}=\sum_{m=1}^{p}a_{2m}a_{2m+1}=\sum_{m=1}^{p}(-3m-1)(-3m+1)=\sum_{m=1}^{p}(9m^2-1)$$

$$=9\cdot\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}-p$$

となるので，

$$\sum_{n=1}^{2p}C_n=\left\{9\cdot\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}-9\cdot\frac{p(p+1)}{2}-4p\right\}+\left\{9\cdot\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}-p\right\}$$

$$=3p(p+1)(2p+1)-9\cdot\frac{p(p+1)}{2}-5p$$

$$=\frac{p}{2}\left(12p^2+18p+6-9p-9-10\right)$$

$$=\frac{p}{2}\left(12p^2+9p-13\right)$$

となる。