[東京工業大学 1978 年 $\boxed{3}$]

平面上の原点を中心とする半径 r の円に $\left(\dfrac{r}{\sqrt{2}},\ \dfrac{r}{\sqrt{2}}\right)$ で接する直線を L とし，L 上に接点と異なる 1 点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ をとる。

(1) L 上の任意の点 $\mathrm{Q}(c,\ d)$ は適当な実数 t をとることにより $c=ta+(1-t)b,\ d=(1-t)a+tb$ と表されることを示せ。

(2) L 上の点 Q が接点と P を結ぶ線分上にあるときの t の範囲を求めよ。

---

(1) 直線 $y=x$ に関して $\mathrm{P}(a,\ b)$ と対称な点を P' とすると $\mathrm{P}'(b,\ a)$ である。

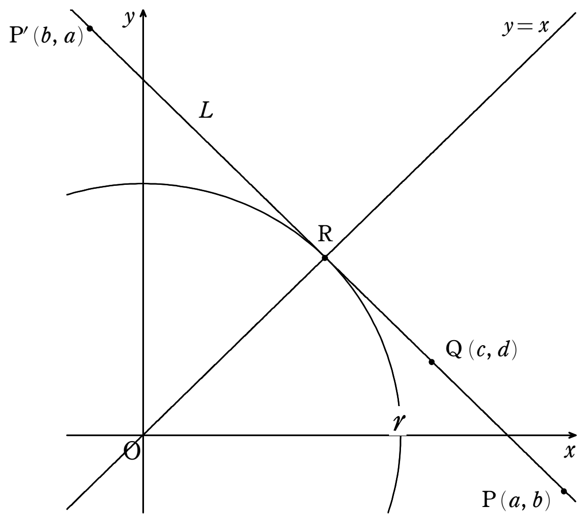
対称性より PP' は直線 $y=x$ に垂直である。

また，接線 L は直線 $y=x$ に垂直かつ点 P を通るので，

PP' は L と一致する。

L 上の任意の点 $\mathrm{Q}(c,\ d)$ に対し，3 点 $\mathrm{P},\ \mathrm{P}',\ \mathrm{Q}$ は

同一直線上にあるから $\overrightarrow{\mathrm{P}'\mathrm{Q}}=t\overrightarrow{\mathrm{P}'\mathrm{P}}$ （t は実数）と



表すことができ，これから $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}'}+t\overrightarrow{\mathrm{P}'\mathrm{P}}$ が成り立つ。

成分で表すと $(c,\ d)=(b,\ a)+t(a-b,\ b-a)$

$=(ta+(1-t)b,\ (1-t)a+tb)$ より題意は示された。

(2) 接点を R とする。

$\overrightarrow{\mathrm{P}'\mathrm{Q}}=t\overrightarrow{\mathrm{P}'\mathrm{P}}$ において $\mathrm{Q}=\mathrm{R}$ のとき $t=\dfrac{1}{2}$ であり，

$\mathrm{Q}=\mathrm{P}$ のとき $t=1$ である。

よって，点 Q が線分 RP 上にあるときの t の範囲は $\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 1$