[東京工業大学 1978 年 $\boxed{2}$]

☆ ☆

a, b, c は $1<a<b<c$ を満たす整数とし，$(ab-1)(bc-1)(ca-1)$ は abc で割り切れるとする。

このとき次の問に答えよ。

(1) $ab+bc+ca-1$ は abc で割り切れることを示せ。

(2) a, b, c をすべて求めよ。

☆ ☆

(1) $(ab-1)(bc-1)(ca-1)=\left(ab^2c-ab-bc+1\right)(ca-1)$

$$=a^2b^2c^2-ab^2c-a^2bc+ab-abc^2+bc+ca-1$$

$$=abc(abc-a-b-c)+ab+bc+ca-1$$

であり，$(ab-1)(bc-1)(ca-1)$ は abc で割り切れることから

$ab+bc+ca-1$ は abc で割り切れる。

(2) $\dfrac{ab+bc+ca-1}{abc}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{abc}$ であり，これが正の整数になることから

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>1$ である。

このとき，$1<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}<\dfrac{3}{a}$ より $a<3$ なので $a=2$

さらにこのとき，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>\dfrac{1}{2}$ であるから $\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}<\dfrac{2}{b}$ より $b<4$ なので $b=3$

したがって，$\dfrac{1}{c}>\dfrac{1}{6}$ より $c<6$ となるから $c=4, 5$

(ⅰ) $a=2, b=3, c=4$ のとき

$(ab-1)(bc-1)(ca-1)=5\cdot 11\cdot 7$ は $abc=2\cdot 3\cdot 4$ では割り切れないので不適。

(ⅱ) $a=2, b=3, c=5$ のとき

$(ab-1)(bc-1)(ca-1)=5\cdot 14\cdot 9$ は $abc=2\cdot 3\cdot 5$ では割り切れる。

よって $a=2, b=3, c=5$