[ 東京工業大学 1978 年 $\boxed{1}$ ]

☆────────────────────────☆

定数 $a,\ b,\ c,\ p,\ q,\ D$ に対して，次の等式

$$(x^3+ax^2+bx+c)^2=(x^2-1)(x^2+px+q)^2+D$$

がすべての $x$ について成り立つとき， $D$ の値を求めよ。

☆────────────────────────☆

$(x^3+ax^2+bx+c)^2$

$=x^6+2ax^5+(a^2+2b)x^4+(2ab+2c)x^3+(2ac+b^2)x^2+2bcx+c^2$

$(x^2-1)(x^2+px+q)^2+D$

$=x^6+2px^5+(p^2+2q-1)x^4+(2pq-2p)x^3+(q^2-2q-p^2)x^2-2pqx-q^2+D$

これらがすべての $x$ について等しくなることから，係数を比較して

$$\begin{cases} 2a=2p & \cdots① \\ a^2+2b=p^2+2q-1 & \cdots② \\ 2ab+2c=2pq-2p & \cdots③ \\ 2ac+b^2=q^2-2q-p^2 & \cdots④ \\ 2bc=-2pq & \cdots⑤ \\ c^2=-q^2+D & \cdots⑥ \end{cases}$$

①，②より　$a=p,\ b=q-\dfrac{1}{2}$　$\cdots⑦$

⑦を③に代入して　$c=-\dfrac{1}{2}p$　$\cdots⑧$

④，⑦，⑧より　$q=-\dfrac{1}{4},\ b=-\dfrac{3}{4}$　$\cdots⑨$

⑤，⑧，⑨より　$p=c=0$　$\cdots⑩$

⑥，⑨，⑩より　$D=\dfrac{1}{16}$