[東京工業大学 1977 年 $\boxed{1}$]

　原点を中心とする半径 $r\,(0<r<1)$ の円 C と，原点を中心とする半径 1 の円 D が与えられている。D 上の点 $(1,\ 0)$ から接点の y 座標が正となるように C に接線 ℓ を引き，ℓ が D と再び交わる点を P とする。P から C に ℓ と異なる接線 m を引き，m が D と再び交わる点を Q とする。Q の座標を r を用いて表せ。

ℓ と円 C との接点を T とし，$\mathrm{A}(1,\ 0)$ とする。

$\angle\mathrm{AOT}=\theta$ とすると $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であり $r=\cos\theta$ …①

$\angle\mathrm{AOP}=2\theta=\angle\mathrm{POQ}$ であるから

Q の座標は $\left(\cos 4\theta,\ \sin 4\theta\right)$ である。

①より $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2r^2-1$

さらに，$\sin\theta>0$ より $\sin\theta=\sqrt{1-r^2}$ なので

$\sin 2\theta=2\cos\theta\sin\theta=2r\sqrt{1-r^2}$

したがって

$\cos 4\theta=2\cos^2 2\theta-1=2(2r^2-1)^2-1=8r^8-8r^4+1$

$\sin 4\theta=2\sin 2\theta\cos 2\theta=2\cdot 2r\sqrt{1-r^2}\cdot(2r^2-1)=4r(2r^2-1)\sqrt{1-r^2}$

よって Q の座標は $\left(8r^8-8r^4+1,\ 4r(2r^2-1)\sqrt{1-r^2}\right)$

[東京工業大学 1977 年 $\boxed{2}$]

　20 から 29 までの整数からすべて等しい確率で 1 つ取り出したものを X とし, 80 から 89 までの整数の 1 つをすべて等しい確率で取り出したものを Y とする。この 2 つの試行は独立とする。X を縦の長さ，Y を横の長さとした長方形の面積を S とする。X, Y の一の位の数を 4 捨 5 入して得られた数をそれぞれ縦の長さ，横の長さとする長方形の面積を S' とするとき，$S' < S$ となる確率を求めよ。

X, Y の取り出し方は 10×10＝100 通りあり，これらは同様に確からしい。

X, Y を 4 捨 5 入したものを X', Y' とすると

2 数の積 XY, $X'Y'$ の表は次の通りで，$S' < S$ すなわち $X'Y' < XY$ となるものは

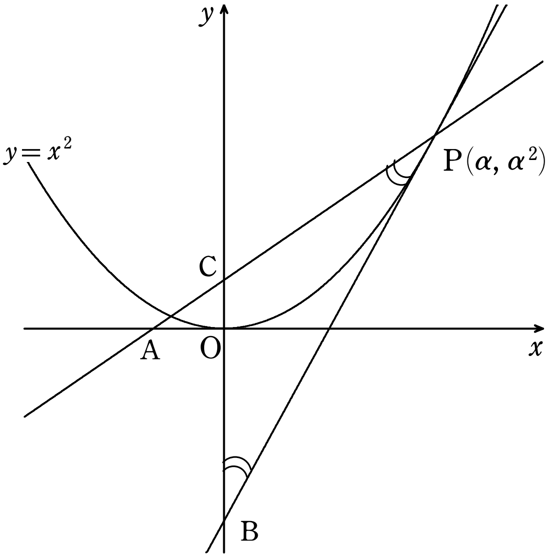
○印のついているところなので 54 通りある。

	X'	20					30				
Y'	Y ＼ X	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
80	80						○	○	○	○	○
	81						○	○	○	○	○
	82						○	○	○	○	○
	83						○	○	○	○	
	84						○	○	○	○	
90	85	○	○				○	○	○	○	○
	86	○					○	○	○	○	○
	87	○					○	○	○	○	○
	88	○					○	○	○	○	○
	89	○					○	○	○	○	○

よって求める確率は $\dfrac{54}{100} = \dfrac{27}{50}$

[東京工業大学 1977 年 $\boxed{3}$]

放物線 $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ と x 軸上の点 $\mathrm{A}\left(-\dfrac{1}{3},\ 0\right)$ を考える。ただし，$x>0$ とする。点 P における放物線の接線が直線 AP および y 軸と等しい角度で交わるとき，点 P の座標を求めよ。



$\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^2)$ （$\alpha>0$）とおく。

P における接線の方程式は　$y'=2x$　より

$y-\alpha^2=2\alpha(x-\alpha)$

y 軸との交点を B とすると　$\mathrm{B}(0,\ -\alpha^2)$　である。

また，直線 AP の方程式は

$$y=\frac{\alpha^2-0}{\alpha-\left(-\dfrac{1}{3}\right)}\left(x+\frac{1}{3}\right)=\frac{\alpha^2}{\alpha+\dfrac{1}{3}}\left(x+\frac{1}{3}\right)$$

よって，AP と y 軸との交点を C とすると　$\mathrm{C}\left(0,\ \dfrac{\alpha^2}{3\alpha+1}\right)$　である。

条件より　$\triangle\mathrm{CBP}$　は　$\mathrm{CB}=\mathrm{CP}$　の二等辺三角形なので

$$\left(\frac{\alpha^2}{3\alpha+1}+\alpha^2\right)^2=\alpha^2+\left(\alpha^2-\frac{\alpha^2}{3\alpha+1}\right)^2$$

$$\alpha^4\left(\frac{1}{(3\alpha+1)^2}+\frac{2}{3\alpha+1}+1\right)=\alpha^2+\alpha^4\left(1-\frac{2}{3\alpha+1}+\frac{1}{(3\alpha+1)^2}\right)$$

$\alpha>0$ より　$\dfrac{2\alpha^2}{3\alpha+1}=1-\dfrac{2\alpha^2}{3\alpha+1}$　から　$4\alpha^2-3\alpha-1=0 \iff (4\alpha+1)(\alpha-1)=0$

よって　$\alpha=1$　となる。

したがって　$\mathrm{P}(1,\ 1)$

[東京工業大学 1977 年 $\boxed{4}$]

m, n は正の整数で，$m<n$ とする。

$0<x<1$ のとき，$\left(1+\dfrac{x}{m^2}\right)^m$，$\left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)^n$ の大小を定めよ。

$0<x<1$ のとき $\left(1+\dfrac{x}{m^2}\right)^m>0, \left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)^n>0$ であるから，自然対数をとった

$m\log\left(1+\dfrac{x}{m^2}\right)$ と $n\log\left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)$ の大小を比較する。

$f(x)=m\log\left(1+\dfrac{x}{m^2}\right)-n\log\left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)$ とおくと，

$$f'(x)=m\cdot\frac{\dfrac{1}{m^2}}{1+\dfrac{x}{m^2}}-n\cdot\frac{\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{x}{n^2}}$$

$$=\frac{m}{x+m^2}-\frac{n}{x+n^2}$$

$$=\frac{m(x+n^2)-n(x+m^2)}{(x+m^2)(x+n^2)}$$

$$=\frac{(m-n)(x-mn)}{(x+m^2)(x+n^2)} \quad \cdots ①$$

ここで，①の（分母）>0，$m<n$，$x<1<mn$ より①の（分子）>0 である。

よって $f(x)$ は単調増加である。

さらに $f(0)=0$ より $f(x)>0$ $(0<x<1)$ であることがわかる。

したがって $\left(1+\dfrac{x}{m^2}\right)^m>\left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)^n$

[東京工業大学 1977 年 $\boxed{5}$]

☆ ☆

$f(x)$ は周期が 2π の連続関数で，c は正の定数とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) $\int_0^{2\pi} f(t-x)\sin t\,dt = \int_0^{2\pi} f(s)\sin(x+s)\,ds$ を証明せよ。

(2) すべての x について $\int_0^{2\pi} f(t-x)\sin t\,dt = c\,f(x)$ が成り立つとき，$f(x)$ および c の値を求めよ。

ただし，$f(0)=1$ とする。

☆ ☆

(1) $I=\int_0^{2\pi} f(t-x)\sin t\,dt$ とおく。

$t-x=s$ とすると，

$$I=\int_{-x}^{2\pi-x} f(s)\sin(x+s)\,ds$$

$$=\int_{-x}^{0} f(s)\sin(x+s)\,ds+\int_0^{2\pi-x} f(s)\sin(x+s)\,ds \quad \cdots①$$

ここで，$s'=s+2\pi$ とおくと，$f(x),\ \sin x$ が周期 2π であることから

(①の右辺第 1 項) $=\int_{2\pi-x}^{2\pi} f(s'-2\pi)\sin(x+s'-2\pi)\,ds'$

$=\int_{2\pi-x}^{2\pi} f(s')\sin(x+s')\,ds'$ となる。

よって $I=\int_{2\pi-x}^{2\pi} f(s')\sin(x+s')\,ds'+\int_0^{2\pi-x} f(s)\sin(x+s)\,ds$

$$=\int_{2\pi-x}^{2\pi} f(s)\sin(x+s)\,ds+\int_0^{2\pi-x} f(s)\sin(x+s)\,ds$$

$$=\int_0^{2\pi} f(s)\sin(x+s)\,ds$$

となって，題意は示された。

(2) $\int_0^{2\pi} f(t-x)\sin t\,dt=\int_0^{2\pi} f(s)\sin(x+s)\,ds$

$$=\int_0^{2\pi} f(s)(\sin x\cos s+\cos x\sin s)\,ds$$

$$=\int_0^{2\pi} f(s)\sin x\cos s\,ds+\int_0^{2\pi} f(s)\cos x\sin s\,ds$$

$$= \sin x \int_0^{2\pi} f(s)\cos s\, ds + \cos x \int_0^{2\pi} f(s)\sin s\, ds$$

$$= a\sin x + b\cos x = cf(x)$$

となる。ただし，$a = \int_0^{2\pi} f(s)\cos s\, ds$，$b = \int_0^{2\pi} f(s)\sin s\, ds$ とおいた。

$c \neq 0$ より $f(x) = \dfrac{a}{c}\sin x + \dfrac{b}{c}\cos x$ となるので，

$$a = \int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{c}\sin s + \frac{b}{c}\cos s\right)\cos s\, ds = \int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{c}\sin s\cos s + \frac{b}{c}\cos^2 s\right)ds$$

$$b = \int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{c}\sin s + \frac{b}{c}\cos s\right)\sin s\, ds = \int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{c}\sin^2 s + \frac{b}{c}\sin s\cos s\right)ds$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin s\cos s\, ds = \int_0^{2\pi}\frac{\sin 2s}{2}ds = 0$

$$\int_0^{2\pi}\sin^2 s\, ds = \int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2s}{2}ds = \pi$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 s\, ds = \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2s}{2}ds = \pi$$

であるから $a = \dfrac{b}{c}\pi,\ b = \dfrac{a}{c}\pi$ …② となる。

$a = 0$ とすると $b = 0$ となりこれは $f(0) = 1$ に矛盾する。

②を辺々かけて $ab = \dfrac{ab}{c^2}\pi^2$

$c > 0$ より $c = \pi$ となり，このとき $a = b$

したがって $f(x) = a\sin x + a\cos x$

$f(0) = 1$ より $a = 1$ なので $f(x) = \sin x + \cos x$

[東京工業大学 1977 年 $\boxed{6}$]

数列 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$ が関係 $a_{n+1}=2a_n{}^2-1\ (n\geqq 1)$ を満たしているとする。

$a_N=1$ を満たす N （ただし $N\geqq 2$ ）があるとき，次の問に答えよ。

(1) $|a_1|\leqq 1$ を証明せよ。

(2) $a_1=\cos\dfrac{k\pi}{2^{N-2}}$ （k はある整数）を証明せよ。

(1) 背理法で示す。

$|a_1|>1$ であるとする。

このとき，$a_1{}^2>1$ であり，$a_2=2a_1{}^2-1>2-1=1$

$a_n>1$ であれば $a_n{}^2>1$ なので，$a_{n+1}=2a_n{}^2-1>2-1=1$ となって

すべての自然数 n に対して $a_n>1$ となる。

これは $a_N=1$ を満たす N があることに矛盾する。よって $|a_1|\leqq 1$ である。

(2) $|a_1|\leqq 1$ より $a_1=\cos\theta$ と表せる。

このとき，$a_2=2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta$ となる。

$a_n=\cos 2^{n-1}\theta$ であるとすると，

$$a_{n+1}=2\left(\cos 2^{n-1}\theta\right)^2-1=2\cdot\frac{1+\cos 2\cdot 2^{n-1}\theta}{2}-1=\cos 2^n\theta$$

となって，すべての自然数 n に対して $a_n=\cos 2^{n-1}\theta$ が成り立つ。

$a_N=1$ を満たす N が存在することから $a_N=\cos 2^{N-1}\theta=1$

これより $2^{N-1}\theta=2k\pi$ （k は整数） $\Leftrightarrow$ $\theta=\dfrac{k\pi}{2^{N-2}}$

よって $a_1=\cos\dfrac{k\pi}{2^{N-2}}$ となる。

[東京工業大学 1977 年 $\boxed{7}$]

☆―――☆

$\begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ $(r>0)$ の形の相異なる 3 個の行列からなる集合 S が,

条件：S に属する任意の行列の積はふたたび S に属する。

を満たすとき，次の問に答えよ。

(1) $\begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \in S$ のとき，r を求めよ。

(2) S を定めよ。

☆―――☆

(1) $A(\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とおく。

S に属する行列は $rA(\theta)$ と表され，条件より $r^2A(2\theta),\ r^3A(3\theta),\ \cdots$ はすべて S に属する。

ここで，$r\neq 1$ とすると $r^nA(n\theta)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ はすべて異なる行列で,

S の元が 3 個であることに反する。よって $r=1$

(2) S の要素を $A(\theta)$ （$0\leqq\theta<2\pi$）とすると,

$A^2(\theta)$，$A^3(\theta)$ も S の要素であることが必要であり,

条件よりこの 3 つは異なるので

$A(\theta)\neq A^2(\theta)$，$A^2(\theta)\neq A^3(\theta)$，$A^3(\theta)\neq A(\theta)$ …①

である。このもとで，$A^4(\theta)=A(\theta),\ A^4(\theta)=A^2(\theta),\ A^4(\theta)=A^3(\theta)$ のいずれかが成り立つ。

E を単位行列として

$A^4(\theta)=A(\theta)$ のとき，$A^{-1}(\theta)$ をかけて $A^3(\theta)=E$ より $A(3\theta)=E$ となり,

$$\cos 3\theta=1 \text{ より } 3\theta=2k\pi\ (k=0,1,2) \text{ から } \theta=0,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$$

$A^4(\theta)=A^2(\theta)$ のとき，$A^{-1}(\theta)$ をかけると $A^3(\theta)=A(\theta)$ より③に矛盾する。

$A^4(\theta)=A^3(\theta)$ のとき，$A^{-1}(\theta)$ をかけると $A^3(\theta)=A^2(\theta)$ より②に矛盾する。

したがって $S=\left\{A(0),\ A\left(\frac{2}{3}\pi\right),\ A\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right\}$ となる。

逆にこのとき，S は条件を満たしている。

したがって求める S は $S=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right\}$