[東京工業大学 1977 年 $\boxed{1}$]

原点を中心とする半径 $r\ (0<r<1)$ の円 C と，原点を中心とする半径 1 の円 D が与えられている。D 上の点 $(1,\ 0)$ から接点の y 座標が正となるように C に接線 ℓ を引き，ℓ が D と再び交わる点を P とする。P から C に ℓ と異なる接線 m を引き，m が D と再び交わる点を Q とする。Q の座標を r を用いて表せ。

[東京工業大学 1977 年 $\boxed{2}$]

20 から 29 までの整数からすべて等しい確率で 1 つ取り出したものを X とし, 80 から 89 までの整数の 1 つをすべて等しい確率で取り出したものを Y とする。この 2 つの試行は独立とする。X を縦の長さ, Y を横の長さとした長方形の面積を S とする。X, Y の一の位の数を 4 捨 5 入して得られた数をそれぞれ縦の長さ, 横の長さとする長方形の面積を S' とするとき, $S' < S$ となる確率を求めよ。

[東京工業大学 1977 年 $\boxed{3}$]

☆ ☆

放物線 $y = x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ と x 軸上の点 $\mathrm{A}\left(-\dfrac{1}{3},\ 0\right)$ を考える。ただし，$x > 0$ とする。点 P における放物線の接線が直線 AP および y 軸と等しい角度で交わるとき，点 P の座標を求めよ。

☆ ☆

[東京工業大学 1977 年 $\boxed{4}$]

☆ ☆

$m,\ n$ は正の整数で，$m<n$ とする。

$0<x<1$ のとき，$\left(1+\dfrac{x}{m^2}\right)^m$，$\left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)^n$ の大小を定めよ。

☆ ☆

[東京工業大学 1977 年 $\boxed{5}$]

$f(x)$ は周期が 2π の連続関数で，c は正の定数とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t-x)\sin t\,dt = \int_0^{2\pi} f(s)\sin(x+s)\,ds$ を証明せよ。

(2) すべての x について $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t-x)\sin t\,dt = c\,f(x)$ が成り立つとき，$f(x)$ および c の値を求めよ。

ただし，$f(0)=1$ とする。

[東京工業大学 1977 年 $\boxed{6}$]

数列 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$ が関係 $a_{n+1} = 2a_n{}^2 - 1\ (n \geqq 1)$ を満たしているとする。

$a_N = 1$ を満たす N （ただし $N \geqq 2$ ）があるとき，次の問に答えよ。

(1) $|a_1| \leqq 1$ を証明せよ。

(2) $a_1 = \cos\dfrac{k\pi}{2^{N-2}}$ （k はある整数）を証明せよ。

[東京工業大学 1977 年 $\boxed{7}$]

$\begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ $(r>0)$ の形の相異なる 3 個の行列からなる集合 S が,

条件：S に属する任意の行列の積はふたたび S に属する。

を満たすとき，次の問に答えよ。

(1) $\begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \in S$ のとき，r を求めよ。

(2) S を定めよ。