[東京工業大学 1977 年 $\boxed{7}$]

$\begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ $(r>0)$ の形の相異なる 3 個の行列からなる集合 S が,

条件：S に属する任意の行列の積はふたたび S に属する。

を満たすとき，次の問に答えよ。

(1) $\begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \in S$ のとき，r を求めよ。

(2) S を定めよ。

---

(1) $A(\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とおく。

S に属する行列は $rA(\theta)$ と表され，条件より $r^2A(2\theta),\ r^3A(3\theta),\ \cdots$ はすべて S に属する。

ここで，$r\neq 1$ とすると $r^nA(n\theta)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ はすべて異なる行列で,

S の元が 3 個であることに反する。よって $r=1$

(2) S の要素を $A(\theta)$ （$0\leqq\theta<2\pi$）とすると,

$A^2(\theta)$，$A^3(\theta)$ も S の要素であることが必要であり,

条件よりこの 3 つは異なるので

$A(\theta)\neq A^2(\theta)$，$A^2(\theta)\neq A^3(\theta)$，$A^3(\theta)\neq A(\theta)$ $\cdots$①

である。このもとで，$A^4(\theta)=A(\theta),\ A^4(\theta)=A^2(\theta),\ A^4(\theta)=A^3(\theta)$ のいずれかが成り立つ。

E を単位行列として

$A^4(\theta)=A(\theta)$ のとき，$A^{-1}(\theta)$ をかけて $A^3(\theta)=E$ より $A(3\theta)=E$ となり,

$$\cos 3\theta=1 \text{ より } 3\theta=2k\pi\ (k=0,\ 1,\ 2) \text{ から } \theta=0,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$$

$A^4(\theta)=A^2(\theta)$ のとき，$A^{-1}(\theta)$ をかけると $A^3(\theta)=A(\theta)$ より③に矛盾する。

$A^4(\theta)=A^3(\theta)$ のとき，$A^{-1}(\theta)$ をかけると $A^3(\theta)=A^2(\theta)$ より②に矛盾する。

したがって　$S=\left\{A(0),\ A\left(\dfrac{2}{3}\pi\right),\ A\left(\dfrac{4}{3}\pi\right)\right\}$　となる。

逆にこのとき，S は条件を満たしている。

したがって求める S は　$$S=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}\right\}$$