[東京工業大学 1977 年 $\boxed{6}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

数列 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$ が関係 $a_{n+1} = 2a_n{}^2 - 1\ (n \geqq 1)$ を満たしているとする。

$a_N = 1$ を満たす N （ただし $N \geqq 2$ ）があるとき，次の問に答えよ。

(1) $|a_1| \leqq 1$ を証明せよ。

(2) $a_1 = \cos\dfrac{k\pi}{2^{N-2}}$ （k はある整数）を証明せよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) 背理法で示す。

$|a_1| > 1$ であるとする。

このとき，$a_1{}^2 > 1$ であり，$a_2 = 2a_1{}^2 - 1 > 2 - 1 = 1$

$a_n > 1$ であれば $a_n{}^2 > 1$ なので，$a_{n+1} = 2a_n{}^2 - 1 > 2 - 1 = 1$ となって

すべての自然数 n に対して $a_n > 1$ となる。

これは $a_N = 1$ を満たす N があることに矛盾する。よって $|a_1| \leqq 1$ である。

(2) $|a_1| \leqq 1$ より $a_1 = \cos\theta$ と表せる。

このとき，$a_2 = 2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta$ となる。

$a_n = \cos 2^{n-1}\theta$ であるとすると，

$$a_{n+1} = 2\left(\cos 2^{n-1}\theta\right)^2 - 1 = 2\cdot\frac{1 + \cos 2\cdot 2^{n-1}\theta}{2} - 1 = \cos 2^n\theta$$

となって，すべての自然数 n に対して $a_n = \cos 2^{n-1}\theta$ が成り立つ。

$a_N = 1$ を満たす N が存在することから $a_N = \cos 2^{N-1}\theta = 1$

これより $2^{N-1}\theta = 2k\pi$ （k は整数） $\Leftrightarrow$ $\theta = \dfrac{k\pi}{2^{N-2}}$

よって $a_1 = \cos\dfrac{k\pi}{2^{N-2}}$ となる。