[東京工業大学 1977 年 $\boxed{5}$]

$f(x)$ は周期が 2π の連続関数で，c は正の定数とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t-x)\sin t\,dt = \int_0^{2\pi} f(s)\sin(x+s)\,ds$ を証明せよ。

(2) すべての x について $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t-x)\sin t\,dt = c\,f(x)$ が成り立つとき，$f(x)$ および c の値を求めよ。

ただし，$f(0)=1$ とする。

---

(1) $\displaystyle I=\int_0^{2\pi} f(t-x)\sin t\,dt$ とおく。

$t-x=s$ とすると，

$$I=\int_{-x}^{2\pi-x} f(s)\sin(x+s)\,ds$$

$$=\int_{-x}^{0} f(s)\sin(x+s)\,ds+\int_0^{2\pi-x} f(s)\sin(x+s)\,ds \quad \cdots①$$

ここで，$s'=s+2\pi$ とおくと，$f(x),\ \sin x$ が周期 2π であることから

(①の右辺第 1 項) $\displaystyle =\int_{2\pi-x}^{2\pi} f(s'-2\pi)\sin(x+s'-2\pi)\,ds'$

$\displaystyle =\int_{2\pi-x}^{2\pi} f(s')\sin(x+s')\,ds'$ となる。

よって $\displaystyle I=\int_{2\pi-x}^{2\pi} f(s')\sin(x+s')\,ds'+\int_0^{2\pi-x} f(s)\sin(x+s)\,ds$

$$=\int_{2\pi-x}^{2\pi} f(s)\sin(x+s)\,ds+\int_0^{2\pi-x} f(s)\sin(x+s)\,ds$$

$$=\int_0^{2\pi} f(s)\sin(x+s)\,ds$$

となって，題意は示された。

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t-x)\sin t\,dt=\int_0^{2\pi} f(s)\sin(x+s)\,ds$

$$=\int_0^{2\pi} f(s)(\sin x\cos s+\cos x\sin s)\,ds$$

$$=\int_0^{2\pi} f(s)\sin x\cos s\,ds+\int_0^{2\pi} f(s)\cos x\sin s\,ds$$

$$=\sin x\int_0^{2\pi} f(s)\cos s\,ds+\cos x\int_0^{2\pi} f(s)\sin s\,ds$$

$$=a\sin x+b\cos x=cf(x)$$

となる。ただし，$a=\int_0^{2\pi} f(s)\cos s\,ds$，$b=\int_0^{2\pi} f(s)\sin s\,ds$ とおいた。

$c\neq 0$ より $f(x)=\dfrac{a}{c}\sin x+\dfrac{b}{c}\cos x$ となるので，

$$a=\int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{c}\sin s+\frac{b}{c}\cos s\right)\cos s\,ds=\int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{c}\sin s\cos s+\frac{b}{c}\cos^2 s\right)ds$$

$$b=\int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{c}\sin s+\frac{b}{c}\cos s\right)\sin s\,ds=\int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{c}\sin^2 s+\frac{b}{c}\sin s\cos s\right)ds$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin s\cos s\,ds=\int_0^{2\pi}\frac{\sin 2s}{2}ds=0$

$$\int_0^{2\pi}\sin^2 s\,ds=\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2s}{2}ds=\pi$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 s\,ds=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2s}{2}ds=\pi$$

であるから $a=\dfrac{b}{c}\pi,\ b=\dfrac{a}{c}\pi$ …② となる。

$a=0$ とすると $b=0$ となりこれは $f(0)=1$ に矛盾する。

②を辺々かけて $ab=\dfrac{ab}{c^2}\pi^2$

$c>0$ より $c=\pi$ となり，このとき $a=b$

したがって $f(x)=a\sin x+a\cos x$

$f(0)=1$ より $a=1$ なので $f(x)=\sin x+\cos x$