[東京工業大学 1977 年 $\boxed{4}$]

☆────────────────────────☆

m, n は正の整数で，$m<n$ とする。

$0<x<1$ のとき，$\left(1+\dfrac{x}{m^2}\right)^m$，$\left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)^n$ の大小を定めよ。

☆────────────────────────☆

$0<x<1$ のとき $\left(1+\dfrac{x}{m^2}\right)^m>0, \left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)^n>0$ であるから，自然対数をとった

$m\log\left(1+\dfrac{x}{m^2}\right)$ と $n\log\left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)$ の大小を比較する。

$f(x)=m\log\left(1+\dfrac{x}{m^2}\right)-n\log\left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)$ とおくと，

$$f'(x)=m\cdot\frac{\dfrac{1}{m^2}}{1+\dfrac{x}{m^2}}-n\cdot\frac{\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{x}{n^2}}$$

$$=\frac{m}{x+m^2}-\frac{n}{x+n^2}$$

$$=\frac{m(x+n^2)-n(x+m^2)}{(x+m^2)(x+n^2)}$$

$$=\frac{(m-n)(x-mn)}{(x+m^2)(x+n^2)} \quad \cdots①$$

ここで，①の（分母）>0，$m<n$，$x<1<mn$ より①の（分子）>0 である。

よって $f(x)$ は単調増加である。

さらに $f(0)=0$ より $f(x)>0$ $(0<x<1)$ であることがわかる。

したがって $\left(1+\dfrac{x}{m^2}\right)^m>\left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)^n$