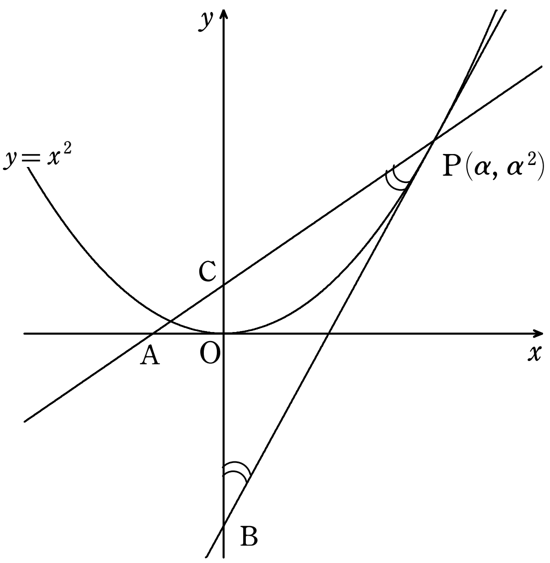
[東京工業大学 1977 年 $\boxed{3}$]

放物線 $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ と x 軸上の点 $\mathrm{A}\left(-\dfrac{1}{3},\ 0\right)$ を考える。ただし，$x>0$ とする。点 P における放物線の接線が直線 AP および y 軸と等しい角度で交わるとき，点 P の座標を求めよ。



$\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^2)$（$\alpha>0$）とおく。

P における接線の方程式は $y'=2x$ より

$y-\alpha^2=2\alpha(x-\alpha)$

y 軸との交点を B とすると $\mathrm{B}(0,\ -\alpha^2)$ である。

また，直線 AP の方程式は

$$y=\frac{\alpha^2-0}{\alpha-\left(-\frac{1}{3}\right)}\left(x+\frac{1}{3}\right)=\frac{\alpha^2}{\alpha+\frac{1}{3}}\left(x+\frac{1}{3}\right)$$

よって，AP と y 軸との交点を C とすると $\mathrm{C}\left(0,\ \dfrac{\alpha^2}{3\alpha+1}\right)$ である。

条件より $\triangle\mathrm{CBP}$ は $\mathrm{CB}=\mathrm{CP}$ の二等辺三角形なので

$$\left(\frac{\alpha^2}{3\alpha+1}+\alpha^2\right)^2=\alpha^2+\left(\alpha^2-\frac{\alpha^2}{3\alpha+1}\right)^2$$

$$\alpha^4\left(\frac{1}{(3\alpha+1)^2}+\frac{2}{3\alpha+1}+1\right)=\alpha^2+\alpha^4\left(1-\frac{2}{3\alpha+1}+\frac{1}{(3\alpha+1)^2}\right)$$

$\alpha>0$ より $\dfrac{2\alpha^2}{3\alpha+1}=1-\dfrac{2\alpha^2}{3\alpha+1}$ から $4\alpha^2-3\alpha-1=0 \iff (4\alpha+1)(\alpha-1)=0$

よって $\alpha=1$ となる。

したがって $\mathrm{P}(1,1)$