[東京工業大学 1977 年 $\boxed{1}$]

☆

原点を中心とする半径 $r\ (0<r<1)$ の円 C と，原点を中心とする半径 1 の円 D が与えられている。D 上の点 $(1,\ 0)$ から接点の y 座標が正となるように C に接線 ℓ を引き，ℓ が D と再び交わる点を P とする。P から C に ℓ と異なる接線 m を引き，m が D と再び交わる点を Q とする。Q の座標を r を用いて表せ。

☆

ℓ と円 C との接点を T とし，$\mathrm{A}(1,\ 0)$ とする。

$\angle\mathrm{AOT}=\theta$ とすると $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であり $r=\cos\theta$ …①

$\angle\mathrm{AOP}=2\theta=\angle\mathrm{POQ}$ であるから

Q の座標は $\left(\cos 4\theta,\ \sin 4\theta\right)$ である。

①より $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2r^2-1$

さらに，$\sin\theta>0$ より $\sin\theta=\sqrt{1-r^2}$ なので

$\sin 2\theta=2\cos\theta\sin\theta=2r\sqrt{1-r^2}$

したがって

$\cos 4\theta=2\cos^2 2\theta-1=2(2r^2-1)^2-1=8r^8-8r^4+1$

$\sin 4\theta=2\sin 2\theta\cos 2\theta=2\cdot 2r\sqrt{1-r^2}\cdot(2r^2-1)=4r(2r^2-1)\sqrt{1-r^2}$

よって Q の座標は $\left(8r^8-8r^4+1,\ 4r(2r^2-1)\sqrt{1-r^2}\right)$