[東京工業大学 1976 年 $\boxed{1}$]

☆ ☆

$p(x)$ を x に関する 3 次式とする。x^4 と x^5 を $p(x)$ で割った余りは等しくて，0 ではないとする。x の整式 $f(x)$ が $p(x)$ で割り切れず，$x\,f(x)$ は $p(x)$ で割り切れるとき，$f(x)$ を $p(x)$ で割った余り $r(x)$ を求めよ。ただし $r(x)$ の最高次の係数は 1 となるものとする。

☆ ☆

条件より x^4，x^5 を $p(x)$ で割った商をそれぞれ $u(x), v(x)$，等しい余りを $s(x)$ とおく。

$$x^4 = p(x)u(x)+s(x) \quad \cdots①$$

$$x^5 = p(x)v(x)+s(x) \quad \cdots②$$

ただし，$s(x)$ は 2 次以下の整式である。

②－①より $x^4(x-1)=p(x)\{v(x)-u(x)\}$

よって $p(x)$ は $x^4(x-1)$ の 3 次以下の整式であるから，定数倍を除いて

$p(x)=x^3$ または $x^2(x-1)$ のいずれかになる。

$p(x)=x^3$ とすると $s(x)=0$ となり矛盾するので $p(x)=x^2(x-1)$

また，$f(x)$ を $p(x)$ で割った商を $h(x)$ とおくと

$f(x)=p(x)h(x)+r(x)$ （$r(x)$ は 2 次以下の整式）

と表され，$xf(x)=x\cdot p(x)h(x)+x\cdot r(x)$ となる。

$x\,f(x)$ は $p(x)$ で割り切れるから，$x\cdot r(x)$ は $p(x)$ で割り切れる。

よって $x\cdot r(x)=p(x)g(x)$ と表される。

ここで，$r(x)$ が 2 次以下で，$p(x)$ が 3 次式であることから，$g(x)$ は定数となる。

したがって $g(x)=c$ とおけて $x\cdot r(x)=c\cdot p(x)$

よって $r(x)=\dfrac{c\cdot p(x)}{x}=cx(x-1)$ となる。

条件より $c=1$ なので $r(x)=x(x-1)$

[東京工業大学 1976 年 $\boxed{2}$]

☆―――☆

正数 c が与えられたとき，すべての実数 x に対して $(b+x^2)^2>(1+4x^2)c^2$ を満たす b の範囲を求めよ。

☆―――☆

$f(x)=(b+x^2)^2-(1+4x^2)c^2$ とおくと

$$f(x)=\left(x^2\right)^2+\left(2b-4c^2\right)x^2+b^2-c^2$$

$$=\left\{x^2+\left(b-2c^2\right)\right\}^2+4bc^2-4c^4-c^2$$

$$=\left\{x^2+\left(b-2c^2\right)\right\}^2+c^2\left(4b-1-4c^2\right)$$

となる。

（ｉ）$b-2c^2>0$ …① のとき

$f(x)$ は $x=0$ のとき最小となるから，満たすべき条件は $f(0)=b^2-c^2>0$

よって $b^2-c^2>0$ より $b<-c,\ c<b$ となるが，

①より $b>\max\{c,\ 2c^2\}$

したがって $0<c\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき $b>c$

$c\geqq\dfrac{1}{2}$ のとき $b>2c^2$ となる。

（ⅱ）$b-2c^2\leqq 0$ …② のとき

$f(x)$ は $x=b-2c^2$ のとき最小となるから，

満たすべき条件は $f(b-2c^2)=c^2\left(4b-1-4c^2\right)>0$

よって $4b-1-4c^2>0$ より $b>c^2+\dfrac{1}{4}$ となるが，②より $b\leqq 2c^2$ であり，

$c^2+\dfrac{1}{4}<b\leqq 2c^2$ となる b が存在するのは

$c^2+\dfrac{1}{4}<2c^2 \Leftrightarrow c<-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}<c$ のときで，さらに $c>0$ より $c>\dfrac{1}{2}$ のとき。

以上より $c>\dfrac{1}{2}$ のとき $c^2+\dfrac{1}{4}<b\leqq 2c^2$ となる。

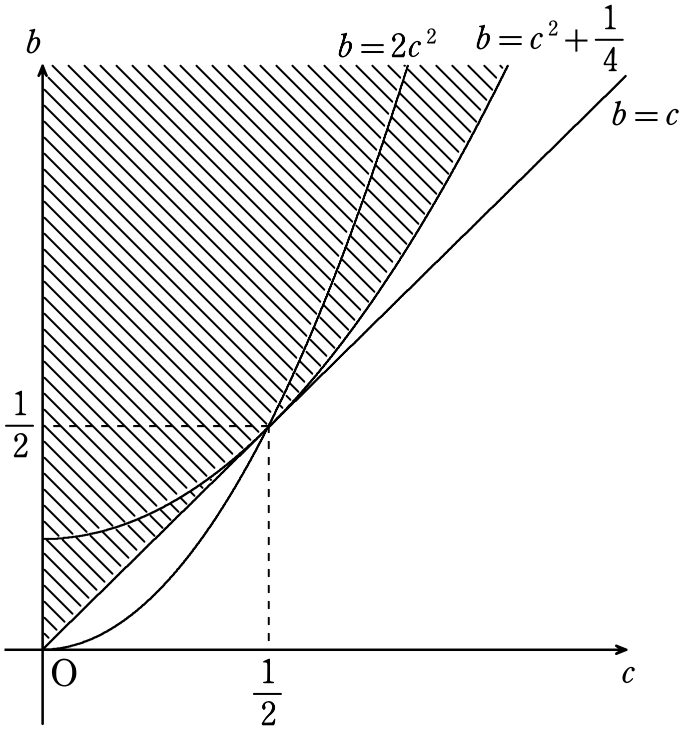
（ｉ）または（ⅱ）より

$0 < c \leqq \dfrac{1}{2}$　のとき　$b > c$

$c > \dfrac{1}{2}$　のとき　$b > c^2 + \dfrac{1}{4}$

が求める b の範囲である。

これを図示すると下図の斜線部のようになる。ただし，境界線上の点は含まない。

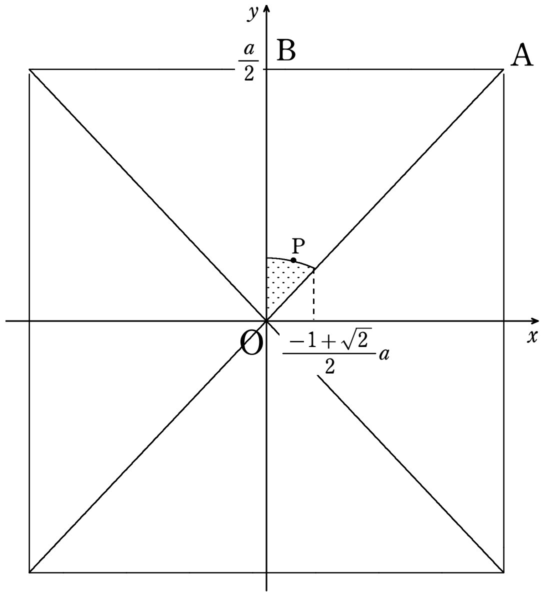


[東京工業大学 1976 年 $\boxed{3}$]

☆ ☆

1 辺の長さが a の正方形の内部にあって，正方形の中心までの距離と，正方形の辺までの最短距離が等しいような点 P を考える。このような点 P 全体のつくる図形によって囲まれる部分の面積を求めよ。

☆ ☆



図のように x, y 軸をとる。

求める面積は対称性から△OAB 内にある部分の 8 倍である。

この部分内の点 P$(x,\ y)$ は条件より

$$x^2+y^2=\left(\frac{a}{2}-y\right)^2$$ を満たす。

よって $x^2+y^2=\dfrac{a^2}{4}-ay+y^2 \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{a^2}{4}-x^2\right)$

これと $y=x$ との交点の x 座標を求めると

$$\frac{1}{a}\left(\frac{a^2}{4}-x^2\right)=x \Leftrightarrow x^2+ax-\frac{a^2}{4}=0$$

$x>0$ より $x=\dfrac{-a+\sqrt{2a^2}}{2}=\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}a$ である。

よって求める面積 S は

$$S=8\left[\left\{\int_0^{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}a}\frac{1}{a}\left(\frac{a^2}{4}-x^2\right)dx\right\}-\frac{1}{2}\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}a\right)^2\right]$$

$$=8\left\{\frac{1}{a}\left[\frac{a^2}{4}x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}a}\right\}-\left(3-2\sqrt{2}\right)a^2$$

$$=\frac{8}{a}\left\{\frac{a^2}{4}\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}a\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}a\right)^3\right\}-\left(3-2\sqrt{2}\right)a^2$$

$$=\frac{4\sqrt{2}-5}{3}a^2$$

[東京工業大学 1976 年 $\boxed{4}$]

☆―――☆

関係式 $\int_0^x f(t)\,dt = e^x - ae^{2x}\int_0^1 f(t)e^{-t}dt$ を満たす連続関数 $f(x)$ と定数 a を求めよ。

☆―――☆

$a\int_0^1 f(t)e^{-t}dt = b$ …① とおく。

$\int_0^x f(t)\,dt = e^x - be^{2x}$ …② に $x=0$ を代入して $0=1-b$ より $b=1$

このとき，②の両辺を x で微分して $f(x)=e^x-2e^{2x}$

また，①より $a\int_0^1\left(e^t-2e^{2t}\right)e^{-t}dt = a\int_0^1\left(1-2e^t\right)dt$

$$= a\Big[t-2e^t\Big]_0^1$$

$$= a(3-2e) = 1 \text{ なので } a = \frac{1}{3-2e}$$

[東京工業大学 1976 年 $\boxed{5}$]

$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ を空間のベクトルとする。$x^2+2y^2+3z^2=1$ を満たすすべての実数 $x,\ y,\ z$ に対して

ベクトル $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ の長さはつねに 1 であるという。

(1) $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ の長さを求めよ。

(2) 内積 $(\vec{a},\ \vec{b}),\ (\vec{a},\ \vec{c}),\ (\vec{b},\ \vec{c})$ を求めよ。

---

(1) $\vec{v}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ とおく。

$x=1,\ y=0,\ z=0$ とすると $\vec{v}=\vec{a}$ より $\left|\vec{a}\right|=1$

$x=0,\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ z=0$ とすると $\vec{v}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{b}$ より $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2}$

$x=0,\ y=0,\ z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とすると $\vec{v}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\vec{c}$ より $\left|\vec{c}\right|=\sqrt{3}$

(2) $\left|\vec{v}\right|^2=\left|x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}\right|^2$

$$=x^2\left|\vec{a}\right|^2+y^2\left|\vec{b}\right|^2+z^2\left|\vec{c}\right|^2+2\left(xy\vec{a}\cdot\vec{b}+yz\vec{b}\cdot\vec{c}+zx\overrightarrow{c}\cdot\vec{a}\right)$$

$$=x^2+2y^2+3z^2+2\left(xy\vec{a}\cdot\vec{b}+yz\vec{b}\cdot\vec{c}+zx\overrightarrow{c}\cdot\vec{a}\right)$$

$\left|\vec{v}\right|^2=1$，$x^2+2y^2+3z^2=1$ より $xy\vec{a}\cdot\vec{b}+yz\vec{b}\cdot\vec{c}+zx\overrightarrow{c}\cdot\vec{a}=0$ …① となる。

①において $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ y=\dfrac{1}{2},\ z=0$ とすると $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$x=0,\ y=\dfrac{1}{2},\ z=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ とすると $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ y=0,\ z=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ とすると $\overrightarrow{c}\cdot\vec{a}=0$ となる。

[東京工業大学 1976 年 $\boxed{6}$]

☆ ☆

行列$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$で表される平面上の 1 次変換を f，直線 $y=mx$ $(m\neq 0)$ を ℓ とし，f は次の 2 条件を満たすとする。

（ｉ） f は ℓ の各点を動かさない。

（ⅱ） f は $\mathrm{P}(1, 0)$ を，この点 P を通り ℓ に平行な直線上にうつす。このとき

(1) $ad-bc$ を求めよ。

(2) f により平面上の任意の点 Q は，Q を通り ℓ に平行な直線上の点にうつることを示せ。

☆ ☆

(1) 直線上の点を $(t,\ mt)$ とおくと条件(ｉ)より

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ mt \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t \\ mt \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} at+bmt=t \\ ct+dmt=mt \end{cases}$$

$t\neq 0$ のとき　$a+bm=1$　…①　かつ　$c+dm=m$　…②

また，条件(ⅱ)より　$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$

$(a,\ c)$ は直線　$y=m(x-1)$　上にあるから　$c=m(a-1)$　…③

①より　$a=1-bm$　これを③に代入して　$c=-bm^2$　…④

②，④より　$m(-bm+d-1)=0$

$m\neq 0$　より　$d=bm+1$　…⑤

①，④，⑤より　$ad-bc=(1-bm)(bm+1)-b\cdot(-bm^2)=1-(bm)^2+(bm)^2=1$

(2) $\mathrm{Q}(x,\ y)$　が　$\mathrm{R}(x',\ y')$　に移るとすると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$ より

$x'=ax+by$　かつ　$y'=cx+dy$

よって　$y'-y=cx+dy-y$

$=cx+(d-1)y$

$=-bm^2x+bmy$

$=bm(-mx+y)$　…⑥

さらに　$x' - x = ax + by - x$

$$= (a-1)x + by$$

$$= b(-mx + y) \quad \cdots ⑦$$

⑥，⑦より　$y' - y = m(x' - x)$　となるので，QR と ℓ は平行である。