[東京工業大学 1976 年 $\boxed{6}$]

行列$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$で表される平面上の 1 次変換を f，直線 $y=mx$ $(m\neq 0)$ を ℓ とし，f は次の 2 条件を満たすとする。

（ i ） f は ℓ の各点を動かさない。

（ii） f は $\mathrm{P}(1, 0)$ を，この点 P を通り ℓ に平行な直線上にうつす。このとき

(1) $ad-bc$ を求めよ。

(2) f により平面上の任意の点 Q は，Q を通り ℓ に平行な直線上の点にうつることを示せ。

---

(1) 直線上の点を $(t,\ mt)$ とおくと条件(i)より

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ mt \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t \\ mt \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} at+bmt=t \\ ct+dmt=mt \end{cases}$$

$t\neq 0$ のとき $a+bm=1$ …① かつ $c+dm=m$ …②

また，条件(ii)より $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$

$(a,\ c)$ は直線 $y=m(x-1)$ 上にあるから $c=m(a-1)$ …③

①より $a=1-bm$ これを③に代入して $c=-bm^2$ …④

②，④より $m(-bm+d-1)=0$

$m\neq 0$ より $d=bm+1$ …⑤

①，④，⑤より $ad-bc=(1-bm)(bm+1)-b\cdot(-bm^2)=1-(bm)^2+(bm)^2=1$

(2) $\mathrm{Q}(x,\ y)$ が $\mathrm{R}(x',\ y')$ に移るとすると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$ より

$x'=ax+by$ かつ $y'=cx+dy$

よって $y'-y=cx+dy-y$

$=cx+(d-1)y$

$=-bm^2x+bmy$

$=bm(-mx+y)$ …⑥

さらに　$x' - x = ax + by - x$

$$= (a-1)x + by$$

$$= b(-mx + y) \quad \cdots ⑦$$

⑥，⑦より　$y' - y = m(x' - x)$　となるので，QR と ℓ は平行である。