[東京工業大学 1976 年 $\boxed{5}$]

$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ を空間のベクトルとする。$x^2+2y^2+3z^2=1$ を満たすすべての実数 $x,\ y,\ z$ に対して

ベクトル $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ の長さはつねに 1 であるという。

(1) $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ の長さを求めよ。

(2) 内積 $(\vec{a},\ \vec{b}),\ (\vec{a},\ \vec{c}),\ (\vec{b},\ \vec{c})$ を求めよ。

---

(1) $\vec{v}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ とおく。

$x=1,\ y=0,\ z=0$ とすると $\vec{v}=\vec{a}$ より $\left|\vec{a}\right|=1$

$x=0,\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ z=0$ とすると $\vec{v}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{b}$ より $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2}$

$x=0,\ y=0,\ z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とすると $\vec{v}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\vec{c}$ より $\left|\vec{c}\right|=\sqrt{3}$

(2) $\left|\vec{v}\right|^2=\left|x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}\right|^2$

$$=x^2\left|\vec{a}\right|^2+y^2\left|\vec{b}\right|^2+z^2\left|\vec{c}\right|^2+2\left(xy\vec{a}\cdot\vec{b}+yz\vec{b}\cdot\vec{c}+zx\vec{c}\cdot\vec{a}\right)$$

$$=x^2+2y^2+3z^2+2\left(xy\vec{a}\cdot\vec{b}+yz\vec{b}\cdot\vec{c}+zx\vec{c}\cdot\vec{a}\right)$$

$\left|\vec{v}\right|^2=1$，$x^2+2y^2+3z^2=1$ より $xy\vec{a}\cdot\vec{b}+yz\vec{b}\cdot\vec{c}+zx\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ …① となる。

①において $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ y=\dfrac{1}{2},\ z=0$ とすると $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$x=0,\ y=\dfrac{1}{2},\ z=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ とすると $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ y=0,\ z=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ とすると $\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ となる。