[東京工業大学 1976 年 $\boxed{4}$]

関係式 $\int_0^x f(t)\,dt = e^x - ae^{2x}\int_0^1 f(t)e^{-t}dt$ を満たす連続関数 $f(x)$ と定数 a を求めよ。

$a\int_0^1 f(t)e^{-t}dt = b$ …① とおく。

$\int_0^x f(t)\,dt = e^x - be^{2x}$ …② に $x=0$ を代入して $0=1-b$ より $b=1$

このとき，②の両辺を x で微分して $f(x)=e^x-2e^{2x}$

また，①より $a\int_0^1\left(e^t-2e^{2t}\right)e^{-t}dt = a\int_0^1\left(1-2e^t\right)dt$

$$= a\left[t-2e^t\right]_0^1$$

$$= a(3-2e) = 1 \text{ なので } a=\frac{1}{3-2e}$$