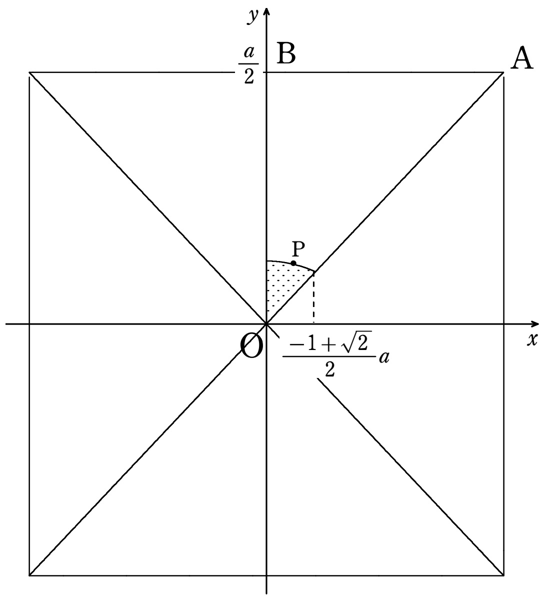
[東京工業大学 1976 年 $\boxed{3}$]

1 辺の長さが a の正方形の内部にあって，正方形の中心までの距離と，正方形の辺までの最短距離が等しいような点 P を考える。このような点 P 全体のつくる図形によって囲まれる部分の面積を求めよ。



図のように $x,\ y$ 軸をとる。

求める面積は対称性から△OAB 内にある部分の 8 倍である。

この部分内の点 $P(x,\ y)$ は条件より

$x^2+y^2=\left(\frac{a}{2}-y\right)^2$ を満たす。

よって $x^2+y^2=\frac{a^2}{4}-ay+y^2 \Leftrightarrow y=\frac{1}{a}\left(\frac{a^2}{4}-x^2\right)$

これと $y=x$ との交点の x 座標を求めると

$$\frac{1}{a}\left(\frac{a^2}{4}-x^2\right)=x \Leftrightarrow x^2+ax-\frac{a^2}{4}=0$$

$x>0$ より $x=\frac{-a+\sqrt{2a^2}}{2}=\frac{-1+\sqrt{2}}{2}a$ である。

よって求める面積 S は

$$S=8\left[\left\{\int_0^{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}a}\frac{1}{a}\left(\frac{a^2}{4}-x^2\right)dx\right\}-\frac{1}{2}\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}a\right)^2\right]$$

$$=8\left\{\frac{1}{a}\left[\frac{a^2}{4}x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}a}\right\}-\left(3-2\sqrt{2}\right)a^2$$

$$=\frac{8}{a}\left\{\frac{a^2}{4}\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}a\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}a\right)^3\right\}-\left(3-2\sqrt{2}\right)a^2$$

$$=\frac{4\sqrt{2}-5}{3}a^2$$