[東京工業大学 1976 年 $\boxed{2}$]

☆―――☆

正数 c が与えられたとき，すべての実数 x に対して $(b+x^2)^2>(1+4x^2)c^2$ を満たす b の範囲を求めよ。

☆―――☆

$f(x)=(b+x^2)^2-(1+4x^2)c^2$ とおくと

$$f(x)=\left(x^2\right)^2+\left(2b-4c^2\right)x^2+b^2-c^2$$

$$=\left\{x^2+\left(b-2c^2\right)\right\}^2+4bc^2-4c^4-c^2$$

$$=\left\{x^2+\left(b-2c^2\right)\right\}^2+c^2\left(4b-1-4c^2\right)$$

となる。

（ⅰ）$b-2c^2>0$ …① のとき

$f(x)$ は $x=0$ のとき最小となるから，満たすべき条件は $f(0)=b^2-c^2>0$

よって $b^2-c^2>0$ より $b<-c,\ c<b$ となるが，

①より $b>\max\{c,\ 2c^2\}$

したがって $0<c\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき $b>c$

$c\geqq\dfrac{1}{2}$ のとき $b>2c^2$ となる。

（ⅱ）$b-2c^2\leqq 0$ …② のとき

$f(x)$ は $x=b-2c^2$ のとき最小となるから，

満たすべき条件は $f(b-2c^2)=c^2\left(4b-1-4c^2\right)>0$

よって $4b-1-4c^2>0$ より $b>c^2+\dfrac{1}{4}$ となるが，②より $b\leqq 2c^2$ であり，

$c^2+\dfrac{1}{4}<b\leqq 2c^2$ となる b が存在するのは

$c^2+\dfrac{1}{4}<2c^2 \Leftrightarrow c<-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}<c$ のときで，さらに $c>0$ より $c>\dfrac{1}{2}$ のとき。

以上より $c>\dfrac{1}{2}$ のとき $c^2+\dfrac{1}{4}<b\leqq 2c^2$ となる。

（ⅰ）または（ⅱ）より

$0 < c \leqq \dfrac{1}{2}$　のとき　$b > c$

$c > \dfrac{1}{2}$　のとき　$b > c^2 + \dfrac{1}{4}$

が求める b の範囲である。

これを図示すると下図の斜線部のようになる。ただし，境界線上の点は含まない。