[東京工業大学 1976 年 $\boxed{1}$]

☆―☆

$p(x)$ を x に関する 3 次式とする。x^4 と x^5 を $p(x)$ で割った余りは等しくて，0 ではないとする。x の整式 $f(x)$ が $p(x)$ で割り切れず，$x\,f(x)$ は $p(x)$ で割り切れるとき，$f(x)$ を $p(x)$ で割った余り $r(x)$ を求めよ。ただし $r(x)$ の最高次の係数は 1 となるものとする。

☆―☆

条件より x^4，x^5 を $p(x)$ で割った商をそれぞれ $u(x), v(x)$，等しい余りを $s(x)$ とおく。

$$x^4 = p(x)u(x)+s(x) \quad \cdots ①$$

$$x^5 = p(x)v(x)+s(x) \quad \cdots ②$$

ただし，$s(x)$ は 2 次以下の整式である。

②－①より $x^4(x-1)=p(x)\{v(x)-u(x)\}$

よって $p(x)$ は $x^4(x-1)$ の 3 次以下の整式であるから，定数倍を除いて

$p(x)=x^3$ または $x^2(x-1)$ のいずれかになる。

$p(x)=x^3$ とすると $s(x)=0$ となり矛盾するので $p(x)=x^2(x-1)$

また，$f(x)$ を $p(x)$ で割った商を $h(x)$ とおくと

$$f(x)=p(x)h(x)+r(x) \quad (r(x) \text{ は 2 次以下の整式})$$

と表され，$xf(x)=x\cdot p(x)h(x)+x\cdot r(x)$ となる。

$x\,f(x)$ は $p(x)$ で割り切れるから，$x\cdot r(x)$ は $p(x)$ で割り切れる。

よって $x\cdot r(x)=p(x)g(x)$ と表される。

ここで，$r(x)$ が 2 次以下で，$p(x)$ が 3 次式であることから，$g(x)$ は定数となる。

したがって $g(x)=c$ とおけて $x\cdot r(x)=c\cdot p(x)$

よって $r(x)=\dfrac{c\cdot p(x)}{x}=cx(x-1)$ となる。

条件より $c=1$ なので $r(x)=x(x-1)$