[東京工業大学 1975 年 $\boxed{1}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

$a,\ b$ を整数とする。$x,\ y$ の連立方程式 $\begin{cases} ax+3by=1 \\ bx+ay=0 \end{cases}$ が整数の解をもつような組 $(a,\ b)$ のうちで，$0 \leqq a,\ 0 \leqq b \leqq 5$ を満たすものをすべて求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

$$\begin{cases} ax+3by=1 \\ bx+ay=0 \end{cases} \cdots ① \iff \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\det\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2-3b^2 \neq 0$ のとき①は解をもち，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a^2-3b^2}\begin{pmatrix} a & -3b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a^2-3b^2}\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$$

より $x = \dfrac{a}{a^2-3b^2}$，$y = -\dfrac{b}{a^2-3b^2}$

(ⅰ) $b=0$ のとき $x=\dfrac{1}{a},\ y=0$ より $a=1$

(ⅱ) $b=1$ のとき $x=\dfrac{a}{a^2-3},\ y=-\dfrac{1}{a^2-3}$ より $a=2$

(ⅲ) $b=2$ のとき $x=\dfrac{a}{a^2-12},\ y=-\dfrac{2}{a^2-12}$ より 解なし

(ⅳ) $b=3$ のとき $x=\dfrac{a}{a^2-27},\ y=-\dfrac{3}{a^2-27}$ より 解なし

(ⅴ) $b=4$ のとき $x=\dfrac{a}{a^2-48},\ y=-\dfrac{4}{a^2-48}$ より $a=7$

(ⅵ) $b=5$ のとき $x=\dfrac{a}{a^2-75},\ y=-\dfrac{5}{a^2-75}$ より 解なし

以上より $(a,\ b)=(1,\ 0),\ (2,\ 1),\ (7,\ 4)$

[東京工業大学 1975 年 $\boxed{2}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――☆

$f(x)=x^2+2x+a$ について，x の方程式 $f(x)=0$ が相異なる実根をもち，$f(f(x))=0$ が重根 r をもつという。r および a を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――☆

$f(x)=0$ は相異なる実数解をもつから $x^2+2x+a=0$ の判別式を D として

$\dfrac{D}{4}=1^2-a>0$ より $a<1$ …①

$f(x)=0$ の実数解を α, β とおくと $\alpha \neq \beta$ で

解と係数の関係より $\alpha+\beta=-1$ かつ $\alpha\beta=a$ …②

このとき，$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$ と表せる。

よって $f(f(x))=\left(f(x)-\alpha\right)\left(f(x)-\beta\right)$ …③

③は $(x-r)^2$ で割り切れる。いま，$f(x)-\alpha$ が $x-r$ で割り切れるとすると

$f(r)-\alpha=0$ であり，$\alpha \neq \beta$ より $f(r)-\beta \neq 0$ となる。

よって $f(x)-\beta$ は $(x-r)$ で割り切れない。

したがって $f(x)-\alpha$ が $(x-r)^2$ で割り切れることになり，

$x^2+2x+a-\alpha=x^2-2rx+r^2$ より $r=-1$ かつ $a-\alpha=1$ となる。

よって $\alpha=a-1$ …④ である。

②，④より $\beta=-a-1$ …⑤ で，④，⑤より $\alpha\beta=-a^2+1$

これと②より $-a^2+1=a$ より $a=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ これは①を満たしている。

以上より $r=-1,\ a=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

[東京工業大学 1975 年 $\boxed{3}$]

---

xの不等式 $\log_a \dfrac{x-2}{x-1} > \log_a \dfrac{3-x}{x}$ を解け。

(ⅰ) $a>1$のとき

真数条件と真数の比較より $\dfrac{x-2}{x-1} > \dfrac{3-x}{x} > 0$

$\dfrac{x-2}{x-1} > \dfrac{3-x}{x}$ を解く。

両辺に $x^2(x-1)^2>0$ をかけて

$x^2(x-1)(x-2) > x(x-1)^2(3-x)$

$x(x-1)\{x(x-2)+(x-1)(x-3)\}>0$

$x(x-1)(2x^2-6x+3)>0$ …①

$2x^2-6x+3=0$ の解は $x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{2}$ であり， $0<\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}<1<\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$ であるから

①の解は $x<0,\ \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}<x<1,\ \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}<x$ …①′

$\dfrac{3-x}{x}>0$ を解く。

両辺に $x^2>0$ をかけて

$x(x-3)<0$

$0<x<3$ …②

①かつ②より $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}<x<1,\ \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}<x<3$

(ⅱ) $0<a<1$のとき

真数条件と真数の比較より $0<\dfrac{x-2}{x-1}<\dfrac{3-x}{x}$

$\dfrac{x-2}{x-1}<\dfrac{3-x}{x}$ を解く。

$x(x-1)(2x^2-6x+3)<0$

$0<x<\dfrac{3-\sqrt{3}}{2},\ 1<x<\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$ …③

$0 < \dfrac{x-2}{x-1}$ を解く。

両辺に $(x-1)^2 > 0$ をかけて

$(x-1)(x-2) > 0$

$x < 1,\ 2 < x$ …④

③かつ④より $0 < x < \dfrac{3-\sqrt{3}}{2},\ 2 < x < \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

よって $a > 1$ のとき $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2} < x < 1,\ \dfrac{3+\sqrt{3}}{2} < x < 3$

$0 < a < 1$ のとき $0 < x < \dfrac{3-\sqrt{3}}{2},\ 2 < x < \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

[東京工業大学 1975 年 $\boxed{4}$]

曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ の接線，曲線 $y=-\dfrac{1}{x}$ $(x<0)$ の接線および x 軸とで囲まれる 3 角形の面積の最大値を求めよ。

$y=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ 上の点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$ $(p>0)$ における接線の方程式は

$$y-\frac{1}{p}=-\frac{1}{p^2}(x-p) \iff y=-\frac{1}{p^2}x+\frac{2}{p} \quad \cdots ①$$

$y=-\dfrac{1}{x}$ $(x<0)$ 上の点 $\mathrm{Q}\left(-q,\ \dfrac{1}{q}\right)$ $(q>0)$ における接線の方程式も同様にして

$$y=\frac{1}{q^2}x+\frac{2}{q} \quad \cdots ②$$

①，②はそれぞれ x 軸と $x=2p$，$x=-2q$ で交わる。

よって 3 角形の底辺の長さは $2p-(-2q)=2p+2q$ である。

また，①，②を連立して，3 角形の高さとなる y 座標を求めると

$$-\frac{1}{p^2}x+\frac{2}{p}=\frac{1}{q^2}x+\frac{2}{q} \iff \left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right)x=\frac{2}{p}-\frac{2}{q} \quad \text{より}$$

$$x=\frac{2p^2q^2}{p^2+q^2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$$

$$=\frac{2pq(p+q)}{p^2+q^2} \quad \text{から}$$

$$y=-\frac{1}{p^2}\cdot\frac{2pq(p+q)}{p^2+q^2}+\frac{2}{p}$$

$$=-\frac{1}{p}\cdot\frac{2q(p+q)}{p^2+q^2}+\frac{2}{p}$$

$$=\frac{-2q(p+q)+2p^2+2q^2}{p(p^2+q^2)}$$

$$=\frac{2(p+q)}{p^2+q^2}$$

となる。

よって，求める３角形の面積をSとすると

$$S=(2p+2q)\cdot\frac{2(p+q)}{p^2+q^2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{2(p+q)^2}{p^2+q^2}$$

$$=2\cdot\frac{p^2+q^2+2pq}{p^2+q^2}$$

$$=2\left(1+\frac{2pq}{p^2+q^2}\right)$$

ここで相加平均・相乗平均の関係式より

$$p^2+q^2\geqq 2\sqrt{p^2\cdot q^2}=2pq$$

等号成立は　$p^2=q^2$　より　$p=q$

よって　$\frac{2pq}{p^2+q^2}\leqq 1$

したがって　Sの最大値は　$\frac{2pq}{p^2+q^2}=1$　のときの　4

[東京工業大学 1975 年 $\boxed{5}$]

☆────────────────────────────────────☆

Aの箱には1個の赤球と2個の青球と3個の白球が入っている。Bの箱には10本のくじが入っていて，そのうち3本が当たりくじである。Aの箱から1個の球をとり，それが赤であれば同時に3本，青であれば同時に2本，白であれば1本のくじをBの箱から引けるものとする。

(1) ちょうど1本当たる確率を求めよ。

(2) 少なくとも1本当たる確率を求めよ。

☆────────────────────────────────────☆

(1) Aの箱から赤球，青球，白球を取り出す事象をそれぞれR，B，Wとし，

Bの箱から当たりくじを1本だけ取り出す事象をL_1とする。

求める確率$P(L_1)$は，

$$
\begin{aligned}
P(L_1) &= P(R\cap L_1)+P(B\cap L_1)+P(W\cap L_1)\\
&= \frac{1}{6}\cdot\frac{{}_3C_1\cdot{}_7C_2}{{}_{10}C_3}+\frac{2}{6}\cdot\frac{{}_3C_1\cdot{}_7C_1}{{}_{10}C_2}+\frac{3}{6}\cdot\frac{{}_3C_1}{{}_{10}C_1}\\
&= \frac{1}{6}\cdot\frac{63}{120}+\frac{2}{6}\cdot\frac{21}{45}+\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{10}\\
&= \frac{283}{720}
\end{aligned}
$$

(2) 余事象の確率を考える。

1本も当たらない確率$P(\overline{L_1})$は，

$$
\begin{aligned}
P(\overline{L_1}) &= P(R\cap\overline{L_1})+P(B\cap\overline{L_1})+P(W\cap\overline{L_1})\\
&= \frac{1}{6}\cdot\frac{{}_7C_3}{{}_{10}C_3}+\frac{2}{6}\cdot\frac{{}_7C_2}{{}_{10}C_2}+\frac{3}{6}\cdot\frac{{}_7C_1}{{}_{10}C_1}\\
&= \frac{1}{6}\cdot\frac{35}{120}+\frac{2}{6}\cdot\frac{21}{45}+\frac{3}{6}\cdot\frac{7}{10}\\
&= \frac{133}{240}
\end{aligned}
$$

よって，求める確率は $1-P(\overline{L_1})=\dfrac{107}{240}$

[東京工業大学 1975 年 $\boxed{6}$]

$x \geqq 0$ で定義された連続な関数 $f(x)$ がこの区間で単調に増加するとき，関数

$F(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt \quad (x>0)$ も単調に増加することを証明せよ。

次に，$3F(x)=f(x) \quad (x>0)$ および $f(1)=1$ を満たすような $f(x)$ を求めよ。

$F'(x)=\dfrac{xf(x)-\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt}{x^2}$ である。

$0<t<x$ のとき $f(x)$ は単調増加であるから $f(t)<f(x)$

よって $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt<\int_0^x f(x)\,dt=xf(x)$ が成り立つ。

よって $F'(x)$ の分子は正となり $F'(x)>0$ より $F(x)$ は単調増加である。

また，$f(x)=\left(\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt\right)'=\left(xF(x)\right)'$ より

$3F(x)=F(x)+x'F(x)$ から $\dfrac{F'(x)}{F(x)}=\dfrac{2}{x}$

$\log\left|F(x)\right|=2\log x+C_1$ （C_1 は積分定数）

よって $F(x)=C_2\,x^2$ （$C_2=e^{C_1}$） から $f(x)=3C_2x^2$

$f(1)=1$ より $3C_2=1$ なので $f(x)=x^2$