[東京工業大学 1975 年 $\boxed{6}$]

☆ ——— ☆

$x≧0$ で定義された連続な関数 $f(x)$ がこの区間で単調に増加するとき，関数

$F(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt\ \ (x>0)$ も単調に増加することを証明せよ。

次に，$3F(x)=f(x)\ \ (x>0)$ および $f(1)=1$ を満たすような $f(x)$ を求めよ。

☆ ——— ☆

$F'(x)=\dfrac{xf(x)-\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt}{x^2}$ である。

$0<t<x$ のとき $f(x)$ は単調増加であるから $f(t)<f(x)$

よって $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt<\int_0^x f(x)\,dt=xf(x)$ が成り立つ。

よって $F'(x)$ の分子は正となり $F'(x)>0$ より $F(x)$ は単調増加である。

また，$f(x)=\left(\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt\right)'=\left(xF(x)\right)'$ より

$3F(x)=F(x)+x'F(x)$ から $\dfrac{F'(x)}{F(x)}=\dfrac{2}{x}$

$\log\left|F(x)\right|=2\log x+C_1$ （C_1 は積分定数）

よって $F(x)=C_2\,x^2$ （$C_2=e^{C_1}$） から $f(x)=3C_2x^2$

$f(1)=1$ より $3C_2=1$ なので $f(x)=x^2$