[東京工業大学 1975 年 $\boxed{4}$]

曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ の接線，曲線 $y=-\dfrac{1}{x}$ $(x<0)$ の接線および x 軸とで囲まれる 3 角形の面積の最大値を求めよ。

$y=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ 上の点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$ $(p>0)$ における接線の方程式は

$$y-\frac{1}{p}=-\frac{1}{p^2}(x-p) \Leftrightarrow y=-\frac{1}{p^2}x+\frac{2}{p} \quad \cdots ①$$

$y=-\dfrac{1}{x}$ $(x<0)$ 上の点 $\mathrm{Q}\left(-q,\ \dfrac{1}{q}\right)$ $(q>0)$ における接線の方程式も同様にして

$$y=\frac{1}{q^2}x+\frac{2}{q} \quad \cdots ②$$

①，②はそれぞれ x 軸と $x=2p$，$x=-2q$ で交わる。

よって 3 角形の底辺の長さは $2p-(-2q)=2p+2q$ である。

また，①，②を連立して，3 角形の高さとなる y 座標を求めると

$$-\frac{1}{p^2}x+\frac{2}{p}=\frac{1}{q^2}x+\frac{2}{q} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right)x=\frac{2}{p}-\frac{2}{q} \quad \text{より}$$

$$x=\frac{2p^2q^2}{p^2+q^2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$$

$$=\frac{2pq(p+q)}{p^2+q^2} \quad \text{から}$$

$$y=-\frac{1}{p^2}\cdot\frac{2pq(p+q)}{p^2+q^2}+\frac{2}{p}$$

$$=-\frac{1}{p}\cdot\frac{2q(p+q)}{p^2+q^2}+\frac{2}{p}$$

$$=\frac{-2q(p+q)+2p^2+2q^2}{p(p^2+q^2)}$$

$$=\frac{2(p+q)}{p^2+q^2}$$

となる。

よって，求める 3 角形の面積を S とすると

$$S=(2p+2q)\cdot\frac{2(p+q)}{p^2+q^2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{2(p+q)^2}{p^2+q^2}$$

$$=2\cdot\frac{p^2+q^2+2pq}{p^2+q^2}$$

$$=2\left(1+\frac{2pq}{p^2+q^2}\right)$$

ここで相加平均・相乗平均の関係式より

$$p^2+q^2\geqq 2\sqrt{p^2\cdot q^2}=2pq$$

等号成立は $p^2=q^2$ より $p=q$

よって $\dfrac{2pq}{p^2+q^2}\leqq 1$

したがって S の最大値は $\dfrac{2pq}{p^2+q^2}=1$ のときの 4