



x の不等式 $\log_a \frac{x-2}{x-1} > \log_a \frac{3-x}{x}$ を解け。



() $a > 1$ のとき

真数条件と真数の比較より $\frac{x-2}{x-1} > \frac{3-x}{x} > 0$

$\frac{x-2}{x-1} > \frac{3-x}{x}$ を解く。

両辺に $x^2(x-1)^2 > 0$ をかけて

$$x^2(x-1)(x-2) > x(x-1)^2(3-x)$$

$$x(x-1)\{x(x-2) + (x-1)(x-3)\} > 0$$

$$x(x-1)(2x^2 - 6x + 3) > 0 \dots$$

$2x^2 - 6x + 3 = 0$ の解は $x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$ であり, $0 < \frac{3 - \sqrt{3}}{2} < 1 < \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$ であるから

の解は $x < 0, \frac{3 - \sqrt{3}}{2} < x < 1, \frac{3 + \sqrt{3}}{2} < x \dots$

$\frac{3-x}{x} > 0$ を解く。

両辺に $x^2 > 0$ をかけて

$$x(x-3) < 0$$

$$0 < x < 3 \dots$$

かつ より $\frac{3 - \sqrt{3}}{2} < x < 1, \frac{3 + \sqrt{3}}{2} < x < 3$

() $0 < a < 1$ のとき

真数条件と真数の比較より $0 < \frac{x-2}{x-1} < \frac{3-x}{x}$

$\frac{x-2}{x-1} < \frac{3-x}{x}$ を解く。

$$x(x-1)(2x^2 - 6x + 3) < 0$$

$$0 < x < \frac{3 - \sqrt{3}}{2}, 1 < x < \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \dots$$

$$0 < \frac{x-2}{x-1} \text{ を解く。}$$

両辺に $(x-1)^2 > 0$ をかけて

$$(x-1)(x-2) > 0$$

$$x < 1, 2 < x \dots$$

$$\text{かつ より } 0 < x < \frac{3-\sqrt{3}}{2}, 2 < x < \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{よって } a > 1 \text{ のとき } \frac{3-\sqrt{3}}{2} < x < 1, \frac{3+\sqrt{3}}{2} < x < 3$$

$$0 < a < 1 \text{ のとき } 0 < x < \frac{3-\sqrt{3}}{2}, 2 < x < \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$